Lahtine võistlus 2018 sügis

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Kati Iher
Oleg Košik
Nikita Leo
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Oliver Nisumaa
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Triinu Veeorg

Matemaatika lahtine võistlus

29. september 2018 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Arvud $1, 2, \ldots, 2018$ kirjutatakse ilma vahedeta üksteise järele, jättes seejuures välja kõik numbrid 8. Kas tekkiv arv jagub 3-ga?

2. Koopas mediteerib kolm munka, kellest igaüks valetab kahel järjestikusel nädalapäeval ja räägib ülejäänud päevadel tõtt. Ühelgi nädalapäeval ei valeta rohkem kui üks munk.

Esmaspäeval ütleb üks munk: „Eile ma valetasin."

Järgmisel päeval vastab teine munk: „Huvitav kokkusattumus, ka mina eile valetasin."

Millisel nädalapäeval ei valeta ükski munk?

3. Positiivsed täisarvud n, m ja k on sellised, et arv $\text{VÜK}(m, k)$ jagub arvuga n ning arv $\text{VÜK}(n, k)$ jagub arvuga m. Tõesta, et $n \cdot \text{SÜT}(m, k) = m \cdot \text{SÜT}(n, k)$.

Märkus. $\text{SÜT}(a, b)$ tähistab arvude a ja b suurimat ühistegurit, $\text{VÜK}(a, b)$ aga arvude a ja b vähimat ühiskordset.

4. Jüri ja Mari ema ootab kaksikuid. Kui sünniksid poisid, oleks Jüril täpselt k korda rohkem vendi kui õdesid. Kui sünniksid tüdrukud, oleks Maril täpselt l korda vähem õdesid kui vendi. Kuid aeg saab täis ja sünnivad hoopis poiss ja tüdruk. Mitu korda on sündinud poisil rohkem vendi kui õdesid ja mitu korda on sündinud tüdrukul vähem õdesid kui vendi?

5. Punkt M rööpküliku $ABCD$ diagonaalil BD valitakse nii, et $|MD| = 3|BM|$. Sirged AM ja BC lõikuvad punktis N. Kui suure osa rööpküliku $ABCD$ pindalast moodustab kolmnurga MND pindala?

6. Arvud 1 kuni 9 kirjutatakse 3×3 tabeli lahtritesse nii, et igas lahtris on täpselt üks arv ning arvud ei kordu. Leia suurim võimalik ühist külge omavate lahtrite paaride arv, kus esimeses lahtris olev arv jagub teises lahtris oleva arvuga.

Matemaatika lahtine võistlus

29. september 2018 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Jüri ja Mari mängivad järgmist mängu. Algul joonistab Jüri paberile suvalise kolmnurga. Seejärel joonistab Mari samale paberile sirge, mis läbib Jüri joonistatud kolmnurga mingi kesklõigu keskpunkti. Siis lisab Jüri joonisele mingi teise sirge, mis läbib sama kesklõigu keskpunkti. Need kaks sirget jaotavad kolmnurga neljaks tükiks; Jüri saab endale ühe pindalalt maksimaalse ja ühe pindalalt minimaalse tüki ning Mari ülejäänud kaks tükki. Võidab see, kelle saadud tükkide kogupindala on suurem. Kas kummalgi mängijaist on võimalik võita vastase suvalise vastumängu korral ja kui jah, siis kellel?

2. Kahe nullist erineva reaalarvu summa on 1, samade arvude pöördarvude summa aga -3. Leia algse kahe reaalarvu kuupide summa.

3. Pööningult leitud taskuarvutil on klahvid 1 kuni 9 ja tehteklahv $\otimes$, kus $x \otimes y$ tähendab arvu $x + \dfrac{x \cdot y}{x - y}$. Tehteklahvi esmakordsel vajutamisel jääb ekraanile eelnevalt sisestatud arv, igal järgneval vajutamisel aga ilmub ekraanile arv $x \otimes y$, kus y on vahetult enne tehteklahvi vajutamist sisestatud täisarv ja x on enne arvu y sisestamist ekraanil olnud arv. Näiteks kui kasutaja vajutab järjest klahve $2, 2, \otimes, 3, 3, \otimes, 4, 4, \otimes$, siis ekraanile ilmuvad vastavalt arvud $2, 22, 22, 3, 33, -44$ (tehte $22 \otimes 33$ tulemus), $4, 44, -22$ (tehte $(-44) \otimes 44$ tulemus). Kui kasutaja vajutab kohe algul tehteklahvi, vajutab tehteklahvi kaks korda järjest või laseb sooritada tehet, mille tulemus pole täisarv, siis läheb arvuti rikki. Kas sellel taskuarvutil on võimalik saada ekraanile arv 2018?

4. Olgu n ja k positiivsed täisarvud, mille korral $k \leqslant n$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant \frac{2(n-k+1)}{n+k}.$$

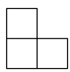
5. Hulknurgas $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ kehtivad seosed

$$|A_0 A_1| \leqslant |A_1 A_2| \leqslant \ldots \leqslant |A_{n-1} A_0|,$$

$$\angle A_0 A_1 A_2 = \angle A_1 A_2 A_3 = \ldots = \angle A_{n-2} A_{n-1} A_0$$

(kõik nurgad võrduses on hulknurga sisenurgad). Tõesta, et see hulknurk on korrapärane.

6. Leia kõik täisarvud $n > 1$, mille puhul on $n \times n$ ruudustik, mille igast nurgast on eemaldatud üks ühikruut, tükeldatav joonisel näidatud 3 ühikruudust koosnevateks nurgikuteks.



Открытое соревнование по математике

29 сентября 2018 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Числа $1, 2, \ldots, 2018$ записываются одно за другим без промежутков, причём все цифры 8 при записи пропускаются. Делится ли полученное число на 3?

2. В пещере медитируют три монаха, каждый из которых лжёт по двум подряд идущим дням недели и говорит правду по остальным дням. Ни в один день недели не лжёт больше чем один монах.

В понедельник один монах говорит: «Вчера я лгал.»

На следующий день другой монах отвечает: «Интересное совпадение, и я вчера лгал.»

В какой день недели не лжёт ни один монах?

3. Целые положительные числа n, m и k таковы, что НОК(m, k) делится на n, а НОК(n, k) делится на m. Доказать, что $n \cdot$НОД$(m, k) = m \cdot$НОД(n, k).

Примечание. НОД(a, b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b, а НОК(a, b) – наименьшее общее кратное чисел a и b.

4. Мама Юры и Маши ждёт двойняшек. Если родятся мальчики, то у Юры будет ровно в k раз больше братьев, чем сестёр. Если родятся девочки, то у Маши будет ровно в l раз меньше сестёр, чем братьев. Однако подходит время и рождаются мальчик и девочка. Во сколько раз у родившегося мальчика больше братьев, чем сестёр, и во сколько раз у родившейся девочки меньше сестёр, чем братьев?

5. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбирается точка M так, что $|MD| = 3|BM|$. Прямые AM и BC пересекаются в точке N. Какую часть от площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника MND?

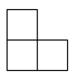
6. Числа от 1 до 9 записываются в ячейки таблицы 3×3 так, что в каждой ячейке ровно одно число, причём числа не повторяются. Найти наибольшее возможное число пар имеющих общую сторону ячеек, где число из первой ячейки делится на число из второй ячейки.

Открытое соревнование по математике

29 сентября 2018 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Юра и Маша играют в следующую игру. В начале Юра рисует на бумаге произвольный треугольник. Затем Маша на этой же бумаге проводит прямую, которая проходит через середину какой-либо средней линии треугольника, нарисованного Юрой. Затем Юра проводит на рисунке ещё одну прямую, которая проходит через середину этой же самой средней линии. Эти две прямые разделяют треугольник на четыре части; Юра получает одну часть с максимальной площадью и одну часть с минимальной площадью, а Маше достаются оставшиеся две части. Выиграет тот, общая площадь частей которого больше. Может ли кто-то из игроков выиграть при любой игре противника, и если да, то кто?
2. Два заданных отличных от нуля действительных числа дают в сумме 1, а обратные к ним числа дают -3. Найти сумму кубов заданных чисел.
3. У найденного на чердаке калькулятора есть клавиши от 1 до 9 и клавиша действия $\otimes$, где $x \otimes y$ обозначает число $x + \dfrac{x \cdot y}{x - y}$. При первоначальном нажатии клавиши действия на экране остаётся введённое до этого число, а после каждого следующего нажатия на экране появляется число $x \otimes y$, где y – целое число, введённое непосредственно перед нажатием клавиши действия, а x – число, бывшее на экране до ввода числа y. Например, если пользователь нажимает клавиши в порядке 2, 2, $\otimes$, 3, 3, $\otimes$, 4, 4, $\otimes$, то на экране соответственно будут видны числа 2, 22, 22, 3, 33, -44 (результат действия $22 \otimes 33$), 4, 44, -22 (результат действия $(-44) \otimes 44$). Если пользователь нажимает клавишу действия в самом начале, нажимает её два раза подряд или допускает выполнение действия, значения которого не является целым числом, то калькулятор выходит из строя. Можно ли на этом калькуляторе получить на экране число 2018?
4. Целые положительные числа n и k таковы, что $k \leqslant n$. Доказать неравенство $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1} + \ldots + \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{2(n-k+1)}{n+k}$.
5. В многоугольнике $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ выполняются условия $|A_0A_1| \leqslant |A_1A_2| \leqslant \leqslant \ldots \leqslant |A_{n-1}A_0|$ и $\angle A_0A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = \ldots = \angle A_{n-2}A_{n-1}A_0$ (в равенстве все углы обозначают внутренние углы многоугольника). Доказать, что этот многоугольник правильный.
6. Найти все целые числа $n > 1$, при которых поле $n \times n$, из каждого угла которого удалено по одной клетке, можно разбить на изображённые на рисунке уголки, состоящие из 3 клеток.



Lahendused

1. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Arvudes 1 kuni 1000 esineb iga nullist erinev number 100 korda nii sajaliste, kümneliste kui ka üheliste kohal. Sama kehtib arvude 1001 kuni 2000 kohta. Seega on arvude 1 kuni 2000 sajaliste, kümneliste ja üheliste numbrite summa, jättes numbrid 8 välja, $600 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+9)$ ehk 22200. Arvudes 2001 kuni 2018 esinevad numbrid 1 kuni 8 üheliste kohal 2 korda, number 9 aga 1 kord, lisaks esineb number 1 kümneliste kohal 9 korda. Neist saame kokku summa $2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+9)$ ehk 74. Peale selle esineb arvudes 1 kuni 2018 number 1 tuhandeliste kohal 1000, number 2 aga 19 korda, mis kokku annavad $1000 + 19 \cdot 2$ ehk 1038. Seega on tekkinud arvu ristsumma $22200 + 74 + 1038$ ehk 23312, mis ei jagu 3-ga. Seega ei jagu 3-ga ka tekkinud arv.

Lahendus 2. Arv ja tema ristsumma annavad 3-ga jagades sama jäägi. Järjestikuste positiivsete täisarvude jäägid 3-ga jagades on $1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots$, seega ka vastavate ristsummade jäägid 3-ga jagades on $1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots$. Näeme, et iga kolm järjestikust ristsummat annavad kokku liites 3-ga jaguva arvu. Et 2016 jagub 3-ga, jagub arvude 1 kuni 2016 ristsummade summa järelikult 3-ga. Kuna 3-ga jagub ka viimase kahe arvu 2017 ja 2018 numbrite summa, jagub arvude $1, 2, \ldots, 2018$ järjestkirjutamisel tekkiv arv 3-ga.

Arvudes 1 kuni 1000 esineb number 8 nii sajaliste, kümneliste kui ka üheliste kohal 100 korda. Sama kehtib arvude 1001 kuni 2000 kohta. Seega esineb number 8 arvudes 1 kuni 2000 kokku 3-ga jaguv arv kordi. Arvudes 2001 kuni 2018 esineb number 8 aga 2 korda. Seega on numbrite 8 osaks ristsummas 3-ga mitte jaguv summa, mis tähendab, et numbrite 8 eemaldamisel saadud arvu ristsumma 3-ga ei jagu ning ka see arv ise 3-ga ei jagu.

2. *Vastus:* esmaspäeval.

Kui esimene munk esmaspäeval valetaks, siis tema valetamispäevad oleksid esmaspäev ja teisipäev, sest pühapäeval räägiks ta oma lause „Eile ma valetasin“ vääruse põhjal tõtt. Et kaks munka ühel ja samal päeval ei valeta, peaks teine munk nii esmaspäeval kui ka teisipäeval tõtt rääkima, mis ei luba tal teisipäeval väita „Eile ma valetasin“. Järelikult räägib esimene munk esmaspäeval tõtt ja oma lause „Eile ma valetasin“ põhjal ta pühapäeval valetab.

Kui teine munk esmaspäeval valetaks, oleks tema teisipäeval öeldud lause „Eile ma valetasin“ tõene. Seega peaks teise munga valetamispäevad olema pühapäev ja esmaspäev. Nii aga ei saa olla, sest pühapäeval valetab ka esimene munk. Järelikult räägib teine munk esmaspäeval tõtt. Et tema teisipäeval öeldud lause „Eile ma valetasin“ osutub vääraks, siis teisipäeval teine munk valetab.

Kui kolmas munk esmaspäeval valetaks, peaks ta valetama ka pühapäeval või teisipäeval, kuid see pole võimalik, sest neil päevil juba valetavad esimene ja teine munk. Seega esmaspäeval ei valeta ükski munk.

3. *Lahendus 1.* Olgu p suvaline algarv ning olgu α, β ja γ tema astendajad vastavalt arvude n, m ja k kanoonilises esituses. Piisab näidata, et algarvu p astendaja arvude $n \cdot \text{SÜT}(m,k)$ ja $m \cdot \text{SÜT}(n,k)$ kanoonilises esituses on üks ja sama. Vaatame kolme juhtu.

- Olgu $\alpha < \beta$. Et arv $\text{VÜK}(n,k)$ jagub arvuga m, peab suurim arvudest α ja γ olema vähemalt niisama suur kui β; see on võimalik vaid juhul $\beta \leqslant \gamma$. Järjestusest $\alpha < \beta \leqslant \gamma$ saame, et algarvu p astendaja arvude $\text{SÜT}(n,k)$ ja $\text{SÜT}(m,k)$ kanoonilises esituses on vastavalt α ja β. Seega p astendaja arvu $n \cdot \text{SÜT}(m,k)$ kanoonilises esituses on $\alpha + \beta$ ning arvu $m \cdot \text{SÜT}(n,k)$ kanoonilises esituses $\beta + \alpha$ ehk sama.
- Olgu $\alpha > \beta$. Vahetades eelmise juhu mõttekäigus n ja m rollid, saame analoogselt, et p astendaja arvude $m \cdot \text{SÜT}(n,k)$ ja $n \cdot \text{SÜT}(m,k)$ kanoonilises esituses on üks ja sama.
- Kui $\alpha = \beta$, siis p astendajad arvude n ja m kanoonilises esituses on võrdsed, mistõttu ka p astendajad arvude $\text{SÜT}(m,k)$ ja $\text{SÜT}(n,k)$ kanoonilises esituses võrduvad. Järelikult sellelgi juhul on p astendaja arvude $n \cdot \text{SÜT}(m,k)$ ja $m \cdot \text{SÜT}(n,k)$ kanoonilises esituses üks ja sama.

Lahendus 2. Kuna eelduse põhjal jagub arv $\text{VÜK}(n,k)$ arvuga m ning ilmselt jagub arv $\text{VÜK}(n,k)$ ka arvuga k, jagub arv $\text{VÜK}(n,k)$ kokkuvõttes arvuga $\text{VÜK}(m,k)$. Vahetades toodud mõttekäigus n ja m, saame samuti, et arv $\text{VÜK}(m,k)$ jagub arvuga $\text{VÜK}(n,k)$. Järelikult $\text{VÜK}(m,k) = \text{VÜK}(n,k)$.

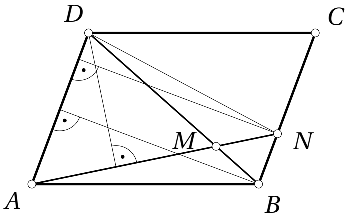
Nüüd saame

$$\frac{m}{\text{SÜT}(m,k)} = \frac{\text{VÜK}(m,k)}{k} = \frac{\text{VÜK}(n,k)}{k} = \frac{n}{\text{SÜT}(n,k)},$$

kust tulenebki ülesande väide.

4. *Vastus:* l ja k.

Lahendus 1. Sündinud poisil on õdesid täpselt samapalju kui olnuks Maril siis, kui oleks sündinud kaks tüdrukut, sest puuduva teise tüdruku asemel on tal õde Mari. Sündinud poisi vennad on parajasti kõik Mari vennad enne tema sündi. Maril oleksid samad vennad olnud ka siis, kui oleks sündinud



Joonis 1

kaks tüdrukut. Eelduse põhjal oleks kahe tüdruku sündimise korral olnud Maril l korda vähem õdesid kui vendi, järelikult on sündinud poisil l korda rohkem vendi kui õdesid.

Analoogselt on sündinud tüdrukul vendi täpselt samapalju kui olnuks Jüril siis, kui oleks sündinud kaks poissi, sest puuduva teise poisi asemel on tal vend Jüri. Sündinud tüdruku õed on parajasti kõik Jüri õed enne tema sündi. Jüril oleksid samad õed olnud ka siis, kui oleks sündinud kaks poissi. Eelduse põhjal oleks kahe poisi sündimise korral olnud Jüril k korda rohkem vendi kui õdesid, järelikult on sündinud tüdrukul k korda vähem õdesid kui vendi.

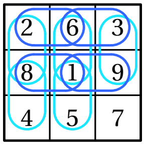
Lahendus 2. Olgu peres enne kaksikute sündi x poissi ja y tüdrukut. Kui kaksikud oleksid mõlemad poisid, oleks peres $x+2$ poissi ja y tüdrukut, millest tulenevalt oleks Jüril $x+1$ venda ja y õde. Kui aga kaksikud oleksid mõlemad tüdrukud, oleks peres x poissi ja $y+2$ tüdrukut, millest tulenevalt oleks Maril x venda ja $y+1$ õde. Ülesande andmete põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+1 &= ky, \\ y+1 &= \dfrac{x}{l}. \end{cases}$$

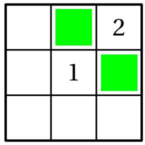
Lahendades saame $x = \dfrac{(k+1)l}{k-l}$ ja $y = \dfrac{l+1}{k-l}$. Kui tuleb juurde 1 poiss ja 1 tüdruk, siis on igal poisil $\dfrac{(k+1)l}{k-l}$ venda ja $\dfrac{l+1}{k-l}+1$ ehk $\dfrac{k+1}{k-l}$ õde, st vendi l korda rohkem kui õdesid, ning igal tüdrukul $\dfrac{l+1}{k-l}$ õde ja $\dfrac{(k+1)l}{k-l}+1$ ehk $\dfrac{k(l+1)}{k-l}$ venda, st k korda vähem õdesid kui vendi.

5. *Vastus:* $\dfrac{1}{8}$.

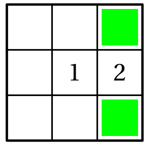
Tähistame kujundi Λ pindala S_Λ. Kuna kolmnurkade AND ja ABD ühisele küljele AD tõmmatud kõrgused on võrdsed AD ja BC paralleelsuse tõttu (joonis 1), siis $S_{AND} = S_{ABD}$. Järelikult $\dfrac{S_{AND}}{S_{ABCD}} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$.



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

Teisalt, et kolmnurgad AMD ja NMB on sarnased vastavate külgede samasihilisuse tõttu, siis $\dfrac{|MN|}{|MA|} = \dfrac{|MB|}{|MD|} = \dfrac{1}{3}$. Seega $\dfrac{|MN|}{|AN|} = \dfrac{|MN|}{|MA| + |MN|} = \dfrac{1}{4}$. Et kolmnurkadel MND ja AND on ühine tipust D tõmmatud kõrgus, siis ka $\dfrac{S_{MND}}{S_{AND}} = \dfrac{|MN|}{|AN|} = \dfrac{1}{4}$.

Kokkuvõttes

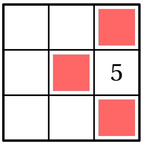
$$\frac{S_{MND}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{MND}}{S_{AND}} \cdot \frac{S_{AND}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

6. *Vastus:* 9.

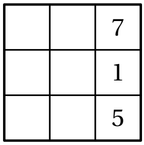
Lahendus 1. Joonisel 2 olevas näites on nõutud ruudupaare 9. Näitame järgnevas, et rohkem pole võimalik. Selleks loendame algul kõik võimalikud paarid arvudest 2 kuni 9, kus esimene arv teisega jagub. Kui väiksem arv sellises paaris on 2, on suurem arv kas 4, 6 või 8, kui väiksem arv on 3, on suurem arv kas 6 või 9, ning kui väiksem arv on 4, on suurem arv 8. Kokku leidsime 3 + 2 + 1 ehk 6 paari (ilmselt ei saa väiksem arv paaris olla 5 või suurem). Oletame, et arvud on paigutatud nii, et tekib 10 nõutud ruutude paari. Et arvudega 2 kuni 9 saab selliseid paare tekkida kuni 6, peab vähemalt 4 paari tekkima arvuga 1. See on võimalik ainult siis, kui 1 asub keskmises ruudus. Siis tekib täpselt 4 paari arvuga 1, mistõttu 10 paari kokkusaamiseks peavad kõik ülal loendatud 6 paari arvudega 2 kuni 9 samuti tekkima. Nüüd aga ei leidu enam ühtegi ruutu, kus saaks paikneda arv 2: kui arv 2 asuks nurgas (joonis 3), ei saaks tekkida 3 paari arvuga 2, kui aga arv 2 asuks äärmise rea või veeru keskmises ruudus (joonis 4), asuks ühes naaberruudus arv 1 ning jällegi ei saaks tekkida 3 sellist paari arvuga 2, kus teine arv on temast suurem.

Lahendus 2. Joonisel 2 olevas näites on nõutud ruudupaare 9. Oletame nüüd, et arvud on paigutatud nii, et leidub 10 ühise küljega ruutude paari, kus esimene arv teisega jagub. Et kaht naaberruutu on üldse võimalik valida 12 viisil, võib ülimalt 2 kohas olla naaberruutudes teineteisega mitte jaguvad arvud.

Arvud 5 ja 7 jaguvad peale nende endi ainult 1-ga, nende endiga ei jagu ükski teine ühekohaline arv. Seega ei saa 5 ega 7 olla keskmises ruudus, sest keskmisel ruudul on 4 naabrit ja neist 3 annaks mittejaguva paari. Kui 5



Joonis 5



Joonis 6

oleks äärel, kuid mitte nurgas (joonis 5), peaks sarnasel põhjusel ühes naaberruudus kindlasti olema 1. Et ülejäänud kahe naaberruuduga moodustuvad mittejaguvad paarid, ei tohi 7 lisada ühtki uut mittejaguvat paari. See oleks võimalik vaid juhul, kui 7 ainsad naabrid oleksid 1 ja 5. See aga tähendaks, et 5, 1 ja 7 paikneksid paarikaupa üksteise naaberruutudes, mis pole võimalik.

Eelnevast järeldub, et 5 peab olema nurgas. Analoogselt peab 7 olema nurgas. Kokku on 4 võimalust valida kaks naaberruutu nii, et üks valituist sisaldab arvu 5 või 7. Neist vähemalt 2 juhul peab tekkima jaguv paar, st teises valitud ruudus olema arv 1. Et see oleks võimalik, peavad 5 ja 7 paiknema lähisnurkades ning 1 olema nende ühises naaberruudus; üldisust kitsendamata olgu 5, 1 ja 7 parempoolses veerus selles järjestuses (joonis 6). Arv 9 ei tohi lisada ühtki uut mittejaguvat paari. Et arv 9 moodustab jaguva paari ainult arvudega 1 ja 3, saavad arvu 9 naabriteks olla vaid 1, 3, 5 ja 7. Arvude 1, 5 ja 7 paiknemise tõttu saab vaid üks neist olla 9 naaber. Seega saaks arvul 9 olla vaid 2 naabrit ehk 9 peaks asuma nurgas, kuid siis ei saaks 1, 5 ega 7 olla tema naaber. Vastuolu näitab, et 10 nõutud naaberruutude paari pole võimalik.

Lahendused

1. *Vastus:* ei.

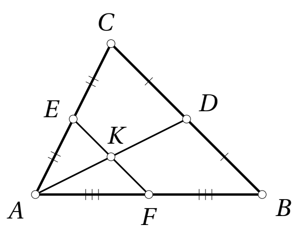
Kolmnurga kesklõigu keskpunkt asub selle kolmnurga mediaanil. Tõepoolest, olgu D, E ja F vastavalt kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid ning K mediaani AD ja kesklõigu EF lõikepunkt (joonis 7). Kolmnurgad AEK ja ACD on sarnased vastavate külgede samasihilisuse tõttu, mistõttu $\frac{|EK|}{|EF|} = \frac{|EK|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$, st mediaan poolitab kesklõigu.

Mari saab kaotust vältida, joonistades oma käigul kolmnurga mediaani pikenduse. Eelneva põhjal vastab see käik reeglitele. See sirge jaotab kolmnurga kaheks võrdse pindalaga osaks. Jaotugu pärast Jüri teist käiku esimene neist pooltest osadeks pindaladega S_1 ja S_2 ning teine osadeks pindaladega S_3 ja S_4. Üldisust kitsendamata olgu S_1 neist neljast pindalast maksimaalne; et $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, siis S_2 on neist neljast pindalast minimaalne. Seega saab Jüri endale täpselt poole algsest kolmnurgast ja Mari teise poole.

Samuti saab Jüri kaotust vältida. Kui Mari joonistab oma käigul mediaani pikenduse, siis eelneva põhjal kumbki ei võida. Kui Mari joonistab mingi muu sirge läbi mingi kesklõigu keskpunkti, joonistab Jüri ise selle kesklõigu keskpunkti läbiva mediaani pikenduse ja jällegi saavad mõlemad võrdse osa kolmnurgast.

Järelikult ei leidu kummalgi mängijal võitvat strateegiat.

Märkus. Ülesande vastus jääb samaks, kui reegleid muuta nii, et avakäigul määrab Jüri omal valikul joonistatud kolmnurga sees ka punkti, mida järgnevalt joonistatud kaks sirget peavad läbima (kesklõigu keskpunkti asemel).



Joonis 7

Nimelt saab läbi suvalise punkti kolmnurga sees tõmmata sirge, mis jaotab kolmnurga kaheks võrdse pindalaga osaks. Tõepoolest, alustades suvalisest seda punkti läbivast sirgest ja pöörates seda 180° ümber selle punkti, muutub sirgest ühel pool olev suurem pindala väiksemaks pindalaks ja vastupidi. Et tegu on pideva protsessiga, tekib mingil hetkel seis, kus sirgest kummalegi poole jäävate alade pindalad on võrdsed. Kasutades seda sirget mediaani pikenduse asemel, saab kumbki mängija analoogselt ülaltoodud lahendusega kaotust vältida.

2. *Vastus:* 2.

Lahendus 1. Olgu need reaalarvud x ja y. Et $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)xy = x+y$, siis ülesande võrdusi arvestades saame $xy = -\frac{1}{3}$. Seega

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1 = 1+1=2.$$

Lahendus 2. Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = -3 \end{cases}$$

saame $x^2-x-\frac{1}{3}=0$, kust $x=\frac{1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$. Vastavalt $y=\frac{1\mp\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$. Et

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3=\frac{1\pm 3\sqrt{\frac{7}{3}}+7\pm\frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}{8}=\frac{8\pm\frac{16}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}{8}=1\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}},$$

siis $x^3+y^3=\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)+\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=2.$

3. *Vastus:* ei.

Oletame, et ekraanile on võimalik saada arv 2018. Et taskuarvutil puudub klahv 0, ei saa arv 2018 tekkida otsese sisestamise teel, vaid peab tekkima tehte $x \otimes y$ tulemusena, kus x ja y on mingid täisarvud ning y on arvutil sisestatav. Kuna lihtsustades saame $x\otimes y=\frac{x^2}{x-y}$, siis peab nende täisarvude korral kehtima võrdus $2018(x-y)=x^2$. Seega jagub arv x^2 arvuga 2018. Et $2018 = 2\cdot 1009$, siis arv x^2 jagub arvudega 2 ja 1009; kuna need tegurid on algarvud, peab nendega jaguma ka arv x. Kokkuvõttes peab arv x jaguma arvuga 2018 ehk $x = 2018z$ mingi täisarvu z korral. Asendades selle võrdusse $2018(x-y)=x^2$ ja lihtsustades, saame $2018z-y=2018z^2$, kust $y=2018z(1-z)$. Et arvu y oleks võimalik taskuarvutil sisestada, peab ta olema positiivne ehk $z(1-z)>0$. Paraku juhul $z\leqslant 0$ on $1-z\geqslant 1$ ja $z(1-z)\leqslant 0$, juhul $z\geqslant 1$ aga $1-z\leqslant 0$ ja samuti $z(1-z)\leqslant 0$.

4. *Lahendus 1.* Positiivsete arvude a ja b korral $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}\geqslant\frac{4}{a+b}$, sest $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$. Kui k ja n on erineva paarsusega, siis rakendades seda võrratust kõigile paaridele $\left(\frac{1}{k+i},\frac{1}{n-i}\right)$, saame

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{n-k+1}{2}\cdot\frac{4}{k+n}=\frac{2(n-k+1)}{k+n}.$$

Kui k ja n on sama paarsusega, siis saame sarnaselt

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}&\geqslant\frac{n-k}{2}\cdot\frac{4}{k+n}+\frac{1}{\frac{k+n}{2}}=\\&=\frac{2(n-k)}{k+n}+\frac{2}{k+n}=\frac{2(n-k+1)}{k+n}.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Rakendades arvudele $k,k+1,\ldots,n$ aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{n-k+1}{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{k+(k+1)+\ldots+n}{n-k+1}.$$

Kuna $k,k+1,\ldots,n$ on aritmeetilise jada järjestikused liikmed, on nende aritmeetiline keskmine võrdne äärmiste liikmete aritmeetilise keskmisega $\frac{k+n}{2}$. Seega

$$\frac{n-k+1}{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{k+n}{2}.$$

Võttes pöördväärtused ja korrutades suurusega $n-k+1$, saame ülesandes nõutud võrratuse.

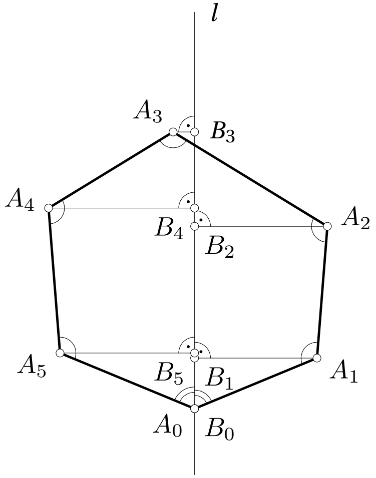
Lahendus 3. Rakendades arvukomplektidele $\left(\sqrt{k},\ldots,\sqrt{n}\right)$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{k}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ Cauchy-Schwarzi võrratust, saame

$$\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot(k+(k+1)+\ldots+n)\geqslant(n-k+1)^2.$$

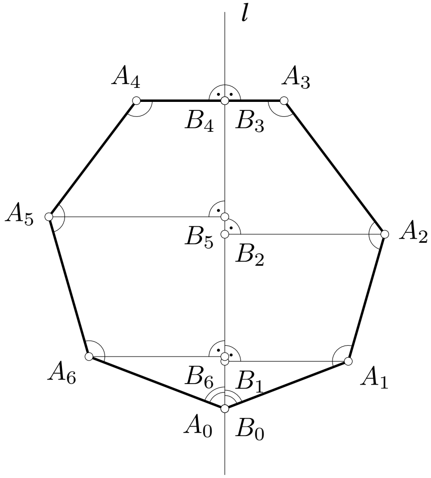
Et $k+(k+1)+\ldots+n=\frac{k+n}{2}\cdot(n-k+1)$, siis

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{(n-k+1)^2\cdot 2}{(k+n)(n-k+1)}=\frac{2(n-k+1)}{k+n}.$$

5. Olgu l sirge, mis läbib tippu A_0 ja poolitab nurga $A_{n-1}A_0A_1$, ning olgu iga $i=0,1,\ldots,n-1$ korral B_i tipust A_i sirgele l tõmmatud ristlõigu aluspunkt (joonised 8 ja 9 kujutavad olukorda vastavalt $n=6$ ja $n=7$ korral). Tähistame veel $\alpha=\angle A_0A_1A_2=\angle A_1A_2A_3=\ldots=A_{n-2}A_{n-1}A_0$ ja



Joonis 8



Joonis 9

$\beta = \angle A_{n-1}A_0A_1$ ning loeme $A_n = A_0$. Alati, kui $0 \leqslant i < \dfrac{n}{2}$, on sirged A_iA_{i+1} ja $A_{n-i}A_{n-(i+1)}$ sirge l suhtes sama nurga all, sest mõlema siht saadakse sirge l pööramisel nurga $(180^\circ - \dfrac{\beta}{2}) + i \cdot (180^\circ - \alpha)$ võrra. Muuhulgas paaritu n korral $A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+1}{2}} \perp l$. Seega $\dfrac{|B_iB_{i+1}|}{|A_iA_{i+1}|} = \dfrac{|B_{n-i}B_{n-(i+1)}|}{|A_{n-i}A_{n-(i+1)}|}$. Et eelduse järgi $|A_iA_{i+1}| \leqslant |A_{n-i}A_{n-(i+1)}|$, kui $0 \leqslant i < \dfrac{n}{2}$, siis ka $|B_iB_{i+1}| \leqslant |B_{n-i}B_{n-(i+1)}|$.

Oletame, et hulknurgas $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ pole kõik küljed võrdse pikkusega; siis $|A_0A_1| < |A_0A_{n-1}|$, mistõttu eelneva põhjal ka $|B_0B_1| < |B_0B_{n-1}|$. Liites kõik võrratused $|B_iB_{i+1}| \leqslant |B_{n-i}B_{n-(i+1)}|$, kus $0 \leqslant i < \dfrac{n}{2}$, ja arvestades ranget võrratust $i = 0$ korral, saame paaris n puhul

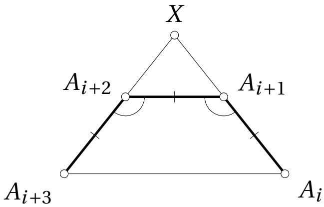
$$|B_0B_1| + |B_1B_2| + \ldots + |B_{\frac{n}{2}-1}B_{\frac{n}{2}}| < |B_nB_{n-1}| + |B_{n-1}B_{n-2}| + \ldots + |B_{\frac{n}{2}+1}B_{\frac{n}{2}}|.$$

See on aga võimatu, sest võrratuse kumbki pool võrdub pikkusega $|B_0B_{\frac{n}{2}}|$. Paaritu n puhul saame analoogiliselt

$$|B_0B_1| + |B_1B_2| + \ldots + |B_{\frac{n-1}{2}}B_{\frac{n+1}{2}}| < |B_nB_{n-1}| + |B_{n-1}B_{n-2}| + \ldots + |B_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}}|.$$

Ka see võrratus on võimatu, sest see tähendaks, et $|B_0B_{\frac{n-1}{2}}| < |B_0B_{\frac{n+1}{2}}|$, kuid $A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+1}{2}} \perp l$ tõttu $B_{\frac{n-1}{2}} = B_{\frac{n+1}{2}}$.

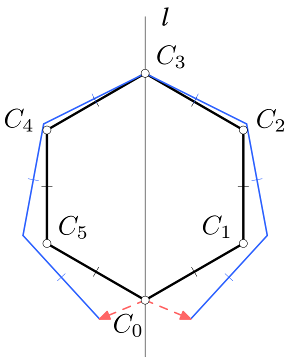
Vastuolu näitab, et $|A_0A_1| = |A_1A_2| = \ldots = |A_{n-1}A_0|$. Tõestamaks n-nurga $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ korrapärasust, vaatleme suvalist nelinurka $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$,



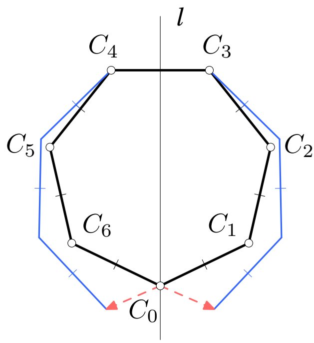
Joonis 10

kus $0 \leqslant i \leqslant n-3$. Olgu X sirgete A_iA_{i+1} ja $A_{i+2}A_{i+3}$ lõikepunkt (joonis 10). Et $\angle XA_{i+1}A_{i+2} = 180^\circ - \alpha = \angle XA_{i+2}A_{i+1}$, on kolmnurk $XA_{i+1}A_{i+2}$ võrdhaarne, st $|XA_{i+1}| = |XA_{i+2}|$. Et $|A_iA_{i+1}| = |A_{i+2}A_{i+3}|$, siis on võrdhaarne ka kolmnurk XA_iA_{i+3}, kust $\angle XA_iA_{i+3} = \angle XA_{i+3}A_i$. Kokkuvõttes saame $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} + \angle A_{i+2}A_{i+3}A_i = \angle A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3} + \angle A_{i+3}A_iA_{i+1}$, millest tulenevalt asuvad punktid A_i, A_{i+1}, A_{i+2} ja A_{i+3} ühel ringjoonel. Alustades punktidest A_0, A_1, A_2 ja võttes ühekaupa punkte juurde, näeme, et kõik punktid $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ asuvad ühel ja samal ringjoonel. Külgede võrdsusest järeldub, et järjestikused punktid määravad sel ringjoonel võrdsed kaared. Seega on huklnurk $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ korrapärane.

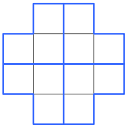
Märkus. Nurga $\angle A_{n-1}A_0A_1$ võrdsust teiste nurkadega saab põhjendada ka järgnevalt. Oletame väitevastaselt, et see nii ei ole, ja vaatleme korrapärast n-nurka $C_0C_1 \ldots C_{n-1}$, mille küljepikkus võrdub hulknurga $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ külgede pikkusega ja millele sirge l on tippu C_0 läbiv sümmeetriatelg. Nurki tippude $C_1, \ldots, C_{n-1}$ juures ühepalju suurendades või vähendades, säilitades samas sümmeetriatelje l, peaks tekkima hulknurgaga $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ võrdne kujund, mis pole aga võimalik, sest tipp C_0 liigub sümmeetriateljest l erinevatesse suundadesse (joonised 11 ja 12 kujutavad vastavalt juhte



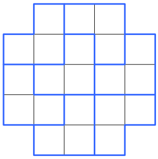
Joonis 11



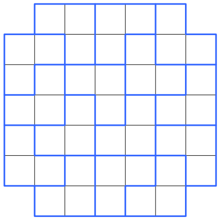
Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14



Joonis 15

$n = 6$ ja $n = 7$). Seega peab hulknurk $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ olema korrapärane.

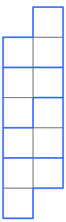
6. *Vastus:* kõik 3-ga mitte jaguvad 1-st suuremad täisarvud.

Lahendus 1. Eemaldades ruudustikust mõõtmetega $n \times n$ kõik nurgaruudud, jääb alles $n^2 - 4$ ühikruutu. Kui n jagub 3-ga, siis n^2 jagub samuti 3-ga, mistõttu $n^2 - 4$ ei jagu 3-ga. Seega pole 3-ga jaguva küljepikkuse n korral võimalik vaadeldavat ala nurgikuteks tükeldada.

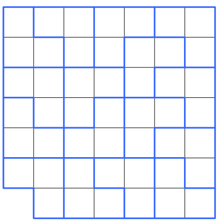
Ülejäänud juhtudel annab n jagamisel 6-ga jäägiks 1, 2, 4 või 5. Juht $n = 2$ on triviaalne, sest tühi ala on tükeldatav 0 nurgikuks. Tükeldused juhtudel $n = 4$, $n = 5$ ja $n = 7$ on näidatud vastavalt joonistel 13, 14 ja 15. Näitame järgnevas, et mistahes suurema n korral järeldub tükelduse olemasolu n jaoks tükelduse olemasolust $n - 6$ jaoks.

Kui n on paaritu, siis eraldame tükeldatava ala kahest servast riba laiusega 6, nii et järele jääb ala $n - 6$ jaoks, mida eelduse põhjal saab nurgikuteks tükeldada. Eraldatava riba kahest otsast lõikame ära sarnased 12 ühikruudust koosnevad tükid, mille tükeldus on näidatud joonisel 16. Riba nurgaosast saab välja lõigata 7×7 ruudu ilma ühe nurgaruuduta; selle tükeldus on näidatud joonisel 17. Järele jäävad ristkülikud mõõtmetega $(n - 9) \times 6$ ja $6 \times (n - 9)$; et $n - 9$ on paaris, on need ristkülikud tükeldatavad vastavalt 2×3 ja 3×2 ristkülikuteks, mis on nurgikuteks tükeldatavad joonise 18 põhjal.

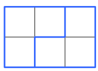
Kui n on paaris, siis eraldame tükeldatava ala igast servast riba laiusega 3, nii et jällegi jääb järele ala $n - 6$ jaoks, mida eelduse põhjal saab nurgikuteks



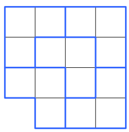
Joonis 16



Joonis 17



Joonis 18



Joonis 19

tükeldada. Eraldatava riba neljast nurgaosast saab välja lõigata 4×4 ruudu ilma ühe nurgaruuduta; selle tükeldus on näidatud joonisel 19. Järele jäävad ristkülikud mõõtmetega $(n-8) \times 3$ ja $3 \times (n-8)$; et $n-8$ on paaris, on need ristkülikud tükeldatavad vastavalt 2×3 ja 3×2 ristkülikuteks, mis on eelneva põhjal tükeldatavad nurgikuteks.

Märkus. Lahenduses paaritu n jaoks kirjeldatud viis tükeldada riba laiusega 6 on kasutatav ka paaris n jaoks, mis on suurem 10-st, sest ristkülik mõõtmetega $6 \times k$ on tükeldatav nurgikuteks ka paaritu k jaoks, kui $k \geqslant 5$. Kui $n \leqslant 10$, siis see lähenemine ei toimi, sest $k = n-9 \leqslant 1$, mistõttu juhud $n = 8$ ja $n = 10$ tuleks eraldi käsitleda.

Lahendus 2. Paarisarvulise 6-st suurema 3-ga mitte jaguva mõõtme n korral saab nurgikuteks tükeldamise läbi viia ka järgmiselt. Kui $n = 6k + 4$ mingi positiivse täisarvu k jaoks, siis lõikame tükeldatava ala keskelt välja ruudu mõõtmetega $6k \times 6k$. Selle saab tükeldada 2×3 ristkülikuteks, mis omakorda on tükeldatavad nurgikuteks nagu näidatud joonisel 18. Üle jääva ala nurkadest lõikame välja neli nurgikut nii, et alles jäävad ristkülikud mõõtmetega $6k \times 2$ ja $2 \times 6k$. Need on samuti tükeldatavad 3×2 ja 2×3 ristkülikuteks. Kui $n = 6k + 2$ mingi positiivse täisarvu k jaoks, siis lõikame tükeldatava ala keskelt välja ruudu mõõtmetega $6(k-1) \times 6(k-1)$, selle saab tükeldada 2×3 ristkülikuteks. Üle jääva ala nurkadest lõikame välja neli kujundit, mis saadakse 4×4 ruudust ühe nurgaruudu eemaldamisel. Need on tükeldatavad nurgikuteks joonise 19 näidatud viisil. Üle jäävad $6(k-1) \times 4$ ja $4 \times 6(k-1)$ ristkülikud, mis on samuti tükeldatavad 3×2 ja 2×3 ristkülikuteks.

Hindamisskeemid

1. *(Markus Rene Pae)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt:

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus, milles on tehtud pisiviga loendamisel: 6 p
- Täislahendus, milles on tehtud arvutuslik viga kas liitmisel või korrutamisel: 5 p
- Loendamisel märgatud seaduspära, kuid selle rakendamisel on tehtud süstemaatiline viga: 4 p
- Tuvastatud, et arvude $1, 2, \ldots, 2018$ järjest kirjutamisel tekkiv arv jagub 3-ga: 2 p
- Õige vastus ilma toetavate selgitusteta: 0 p

Ülesanne osutus ootamatult keeruliseks ning seda kajastab ühtlasi ka üpris madal keskmine punktiskoor. Kõige sagedamini esinesid vead numbrite loendamisel, kuid leidus ka õpilasi, kes hakkasid numbrite summa asemel leidma arvude summat. Leidus ka õpilasi, kellel oli teksti mõistmisega raskusi ning kes hakkasid lahendama sootuks teistsugust ülesannet. Lisaks sellele oli üsna palju üherealisi lahenduskäike, kus oli öeldud vastus ilma täiendavate selgitusteta.

Parandaja rõõmuks leidus väga palju leidlikke lahendusi, mis ei ühtinud žürii poolt pakututega. Üheks nende seast oli lahenduskäik, mis jättis arvestas tahvlile kirjutatud arvus vaid numbreid 1, 2, 4, 5 ja 7, sest ülejäänud numbrid ei muuda ristsumma jaguvust kolmega.

2. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool toodud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et esimene munk valetab pühapäeviti, teine munk teisipäeviti ja mitte kumbki munk esmaspäeviti: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:

  - Selgitatud välja kahe esimese munga valetamispäevad kõigil neljal juhul vastavalt sellele, kas kumbki ülesandes esitatud väide on tõene või väär, ilma nägemata vastuolu tingimusega, et ühelgi päeval ei valeta rohkem kui üks munk: *2 p*

- Mõne jaoks neist neljast juhust tehtud täielik analüüs koos korrektse järeldusega, kas ülesande tingimused on täidetud või mitte: *à 1 p*

◦ Põhjendatud, et kolmas munk ei valeta esmaspäeviti: 2 p

◦ Õige vastus: 1 p

Ülesanne osutus lihtsaks. Siiski andsid mõned õpilased ka vale vastuse või ei lahendanud seda üldse. Ainsad päevad, mida vastuseks ei pakutud, olid teisipäev ja pühapäev. Tüüpilisteks vigadeks oli mõnede juhtude vaatluse alt väljajätmine (nt juht, kus esimese munga väide on väär) ja selgitamata jätmine, miks kolmas munk ei saa esmaspäeval valetada.

Mitmes venekeelses töös olid munkadest monarhid saanud.

3. *(Nikita Leo)*

Lahenduse allpool toodud osade eest antud punktid summeeriti.

◦ Näidatud, et $\text{VÜK}(m,k) = \text{VÜK}(n,k)$: 4 p

◦ Näidatud, et võrdusest $\text{VÜK}(m,k) = \text{VÜK}(n,k)$ järeldub võrdus $n \cdot \text{SÜT}(m,k) = m \cdot \text{SÜT}(n,k)$: 3 p

4. *(Kaur Aare Saar)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

◦ Täislahendus: 7 p

◦ Pandud üldjuhul kirja 4 võrrandit sidumaks otsitavad suurused muutujatega k, l ning poiste ja tüdrukute arvuga peres: 5 p

◦ Pandud üldjuhul kirja 2 võrrandit sidumaks muutujad k ja l poiste ja tüdrukute arvuga peres: 3 p

◦ Vaadatud läbi mõni üksik juht ja leitud numbriline vastus vastava näite jaoks: 1 p

◦ Esitatud ideid võrrandite koostamiseks, kuid Jüri on ekslikult loetud enda vennaks ja/või Mari enda õeks: 0 p

Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Mõned õpilased, kes olid suutnud panna kirja võrdused, mis seovad ülesandes olulisi suurusi, ei osanud otse märgata, et suurused k ja l on ka otsitavad suhted ning olid otsustanud minna ringiga ja kasutada asendusmeetodit selle tõestamiseks. Mitmed õpilased jäid sellega hätta ning seetõttu jäi lahendus lõpetamata. Kõige tüüpilisemaks veaks osutus ootuspäraselt ülesande kitsendamine mingile suvalisele poiste ja tüdrukute arvule peres, selle asemel et analüüsida üldjuhtu. Probleeme esines ka teksti mõistmisega. Paljud õpilased olid ekslikult eeldanud, et k ja l peavad olema ühest suuremad naturaalarvud, kuigi ülesande tekstis sellekohane info puudus. Sellest tulenevalt üritati leida k ja l arvulist väärtust ning ei mõistetud, et ülesande vastus tuleb anda k ja l kaudu. Samuti esines probleeme mõistmisega, et kui laste hulgas on t tüdrukut, siis Maril on $t-1$ õde, mitte t õde.

5. *(Janno Veeorg)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud kolmnurkade BMN ja DMA sarnasus: 1 p
- Leitud lõikude BN ja NC suhe: 1 p
- Leitud kolmnurkade BMN ja DMA pindalade suhe: 1 p
- Näidatud, et kolmnurkade ABM ja MND pindalad on võrdsed: 2 p
- Leitud kolmnurga ABM ja rööpküliku $ABCD$ pindalade suhe ja avaldatud lõppvastus: 2 p

Puudulike põhjenduste puhul võidi punkte maha võtta.

Üllatavalt paljudes töödes oli ülesande tekstist valesti aru saadud ja kasutatud tingimuse $|MD| = 3|BM|$ asemel tingimust $3|MD| = |BM|$. Sellisel juhul kasutab lahendus sarnaseid võtteid, aga on natuke lihtsam, seega said sellised tööd maksimaalselt 4 punkti.

Paljudes töödes võeti konkreetne rööpkülik ja üritati sellel erinevate lõikude mõõtmise kaudu vastus välja arvutada. Lisaks sellele, et selline meetod põhimõtteliselt ei sobi selle ülesande lahendamiseks, oli ka enamustes töödes mõõte- või arvutusvigade tõttu vale vastuseni jõutud. Kõik sellised tööd said loomulikult 0 punkti.

6. *(Jaan Kristjan Kaasik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Toodud näide 9 jaguva paariga tabelist: 2 p
- Tõestatud, et ei leidu sellist arvude asetust tabelis, et jaguvaid paare oleks rohkem kui 9: 5 p

  Sealhulgas:
  - Tähele pandud, et tabelis on naaberruutude paare 12: *1 p*
  - Tõestatud, et kui jaguvaid paare oleks rohkem kui 9, peaks arv 1 tingimata asuma keskmises ruudus: *2 p*
  - Eeldusel, et 1 asub keskmises ruudus, tõestatud, et leidub vähemalt 3 mittejaguvate arvudega naaberruutude paari: *2 p*

Tegu on ülesandega, kus peame leidma mingist hulgast suurima elemendi. Selle tõestamiseks me peame näitama, et leitu on suurem igast teisest selle hulga elemendist või et pole elementi, mis on temast suurem. Lahendus, kus lihtsalt konstrueeritakse lahend, milles on 9 paari, ei rahulda mitte kumbagi tõestusskeemi.

Enamus töid eeldas, et 1 on keskel, sest ta annab igal juhul meile 4 paari (iga arv tabelis jagub ühega). See on põhjendamatu, kuna võime keskele asetada ka arvu 2 nii, et ta tekitaks 4 paari. Äkki saame sellises olukorras veel rohkem paare? Kuigi tuleb välja, et asetades 2 keskele, on maksimaalne paaride arv 8, siis ei tohi seda juhtu tõestuses lihtsalt ära kaotada.

Üllatavalt palju oli ülesannet valesti mõistetud. Kas kirjutatud tabelisse kõik arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 järjest või mõistetud, et arvud moodustavad paari, kui vasakul asetsev arv jagub parempoolsega vms. Edaspidi, kui võimalik, siis igaks juhuks võib alati küsimuse esitada!

Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool toodud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Märgitud, et kesklõigu keskpunkt asub kolmnurga mediaanil: 1 p
- Põhjendatud, et kui üks tõmmatud joontest on mediaan, jääb mäng viiki: 2 p
- Näidatud, et Mari saab mängu mitte kaotada: 2 p
- Näidatud, et Jüri saab mängu mitte kaotada: 2 p

Ülesanne osutus arvatust raskemaks. Paljudel ei tekkinud ülesande lahendamiseks õiget ideed, et vaadelda mediaani.

Paljudes lahendustes esinesid mitmed sarnased puudujäägid. Näiteks väideti, et Mari peab oma käigul jagama kolmnurka kaheks võrdse pindalaga osaks, kuid ei selgitatud, miks on selline jaotamine võimalik.

Tõestamaks, et Jüri ei saa kaotada, üritati paljudes lahendustes näidata, et kui Mari sirge jagab kolmnurga kaheks erineva pindalaga osaks, siis Jüril on alati võimalik võita. See väide peab küll paika, kuid selle tõestusel esitati tihti mittekehtivaid argumente. Näiteks, et Jüri saab tõmmata oma sirge nii, et vähima pindalaga osa jääb suurema pindalaga poolele. Kui kolmnurk on teravnurkne ja Mari tõmmatud sirge on kesklõik, siis see nii ei ole.

2. *(Taavet Kalda)*

Kuna ülesannet sai lahendada mitmel erineval viisil, rakendati kaht erinevat hindamisskeemi.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Avaldatud otsitavate reaalarvude korrutis: 3 p
- Leitud lõppvastus asenduse teel, kasutades kuupide summa valemit või alternatiivseid meetodeid: 4 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud ruutvõrrand mõlema reaalarvu leidmiseks: 3 p
- Leitud mõlema muutuja täpne väärtus: 2 p
- Avaldatud lõppvastus ja lihtsustatud: 2 p

Juhul kui õpilane oli avaldanud lõppvastuse, aga jätnud selle lihtsustamata kujule, anti 6 punkti.

Suurem osa lahendajatest lahendasid ülesande toore jõuga. Kõige sagedamini kaotasid õpilased punkte lahendeid kuupi võttes ja kokku liites.

3. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Teisendatud võrrand kujule $x^2/(x-y) = 2018$: 1 p
- Leitud arvu 2018 algtegurid 2 ja 1009: 1 p
- Järeldatud sellest, et x jagub 2-ga ja 1009-ga ehk 2018-ga: 1 p
- Esitatud x kujul $x = 2018z$, kus z on mingi täisarv: 1 p
- Pandud see võrrandisse sisse ja avaldatud y kui teatavate tegurite korrutis: 1 p
- Järeldatud, et sobivat y väärtust ei leidu: 2 p

Esines järgmisi tüüpilisi vigu.

- Hulk lahendajaid pakkus, et arvu 2018 saab nii, et vajutada järjest klahve 2, 0, 1, 8, panemata tähele, et klahvi 0 taskuarvutil pole. Sellised lahendused said kõik 0 punkti.
- Seda, et x^2 jagumisest 2018-ga järeldub x jagumine 2018-ga, tuleb põhjendada, see ei ole vahetult selge. Näiteks 12^2 jagub 18-ga, aga 12 ise ei jagu 18-ga. Punkte kaotatigi peamiselt tõestamata väidete eest.
- Paljud lahendajad jätsid selle ülesande üldse proovimata.

4. *(Jaan Toots)*

Hindamisskeemid vastavad erinevatele tüüpilistele lahendusideedele.

Lahendus 1. Skeem aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust paaride kaupa rakendavale lahendusele. Lahenduse allpool toodud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Paaride jaoks on näidatud $\dfrac{1}{k+i} + \dfrac{1}{n-i} \geqslant \dfrac{4}{n+k}$: 4 p
- Lahendus on lõpuni viidud rakendades seda kõigile paaridele: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Summat käsitletud, arvestamata $n-k$ paarsust: *2 p*

Lahendus 2. Skeem aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust arvudele $k, k+1, \ldots, n$ rakendavale lahendusele. Tüüpiliste mõttekäikude eest anti järgnevaid punkte.

- Täislahendus: 7 p
- Lahenduses on sisulisi vigu või lahendust pole lõpule viidud: 5 p
- Rakendatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust algsele võrratusele: 2 p

Lisaks žürii poolt pakutud lahendustele oli lahendatud ka, kasutades *induktsiooni ühel muutujal n (või k) baasiga $n = k$ hoides teist muutujat k (või n) konstantsena.* Selle lahenduse allpool toodud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Induktsiooni on läbi viidud ühel muutujal baasiga $n = k$: 4 p
- Induktsiooni sammu tõestus on lõpuni viidud: 3 p

Ülesannet lahendati mitmel erineval viisil, kusjuures esindatud olid kõik žürii pakutud lahendused ning esines ka uudseid lähenemisi. Mitmed lahendajad piirdusid siiski vaid erijuhtude vaatlemisega, mille eest punkte ei antud. Lisaks kaotati muidu õige lähenemisega töödes punkte arvukate vigade eest.

5. *(Sandra Schumann)*

Skeemi allpool toodud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Vaadeldud külgede projektsioone $\angle A_{n-1}A_0A_1$ poolitajale: 1 p
- Tõestatud, et hulknurga küljed on võrdsete pikkustega, kui hulknurgal on paarisarv tippe: 2 p
- Tõestatud, et hulknurga küljed on võrdsete pikkustega, kui hulknurgal on paaritu arv tippe: 2 p
- Tõestatud, et hulknurga kõigi sisenurkade suurused on võrdsed: 2 p

Ülesanne osutus väga keeruliseks. Vaid üks õpilane sai punkte ja seda tõestamise eest, et kõik hulknurga küljed on võrdsete pikkustega. Hindamise koha pealt oleks peaaegu sama hästi töötanud skeem, milles täpsustatud vaid, et külgede võrdsuse tõestamine annab 5 p ja sihile mitte viiv proovimine 0 p. Sageli ei pandud tähele, et üks nurk ei pruugi olla ülejäänutega võrdse suurusega. Palju kasutati ka „spiraaliargumenti“, mille kohaselt öeldi, et hulknurga küljed moodustavad spiraali – selline argument ise punkte ei saanud, sest ei tööta niisama lihtsalt. Kasutati ka muid väiteid, mis ei kehti või mille tõestamine on sama keeruline kui ülesande enda tõestamine.

6. *(Kati Iher)*

Kuna ülesannet lahendati mitmel erineval viisil, rakendati kaht erinevat hindamisskeemi.

Skeem žürii lahendusega sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et 3-ga jaguvad arvud n ei sobi: 1 p
- Toodud konstruktsioon paaris n jaoks: 3 p

  Sealhulgas:
  - Juht $n = 6k + 4$: *1 p*
  - Juht $n = 6k + 2$: *2 p*
- Konstruktsioon paaritu n jaoks: 3 p

Skeem mõttekäikude jaoks, kus kasutati induktsiooni sammuga 3. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et 3-ga jaguvad arvud n ei sobi: 1 p
- Olemas $n = 4$ ja $n = 5$ tükeldused ehk induktsiooni baas: 1 p
- Läbi viidud õige põhjendatud induktsioon sammuga 3: 5 p
- *Sealhulgas tüüpiliste puudulike tõestuste eest antud punktid:*
  - Pole põhjendatud, miks ülejääva ala saab täita 3×2 ja 2×3 ristkülikutega: *3 p*

Üllatavalt paljud õpilased olid ülesandest valesti aru saanud ning üritanud lahendada ülesannet, kus on ruudustikust eemaldatud üks nurgaruut või üldse mitte ühtegi. Paljudele lahendajate valmistas raskusi, et näidata seda, et kui n jagub 3-ga, siis $n^2 - 4$ ei jagu 3-ga või arvati, et sellest piisab tõestamaks, et ülejäänud arvude n korral on tükeldamine võimalik.