Lahtine võistlus 2017 talv

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Ago-Erik Riet
Kati Smotrova
Janno Veeorg

Matemaatika lahtine võistlus

16. detsember 2017 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Õpetaja joonestas tahvlile viisnurga, milles kehtivad järgmised tingimused.

1) Leidub kaks võrdse suurusega nurka.
2) Leidub kolm nurka, millest ühe suurus võrdub kahe ülejäänud nurga suuruste summaga.
3) Leidub neli nurka, millest ühe suurus võrdub kolme ülejäänud nurga suuruste summaga.
4) Leidub nurk, mille suurus võrdub nelja ülejäänud nurga suuruste summaga.

Leia selle viisnurga nurkade suurused.

2. Kirjutises

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

pannakse iga kahe järjestikuse numbri vahele pluss- või miinusmärk.

a) Leia vähim positiivne paaritu arv, mida pole tekkiva avaldise väärtusena võimalik saada.
b) Leia vähim positiivne paarisarv, mida pole tekkiva avaldise väärtusena võimalik saada.

3. Kas leidub neli erinevat algarvu, millest iga kolme summa on samuti algarv?

4. Kaks rongi sõidavad paralleelsetel teedel ühtlase kiirusega vastassuundades. Hetkest, kui rongide ninad on kohakuti, kulub täpselt 8 sekundit hetkeni, kui kohakuti on rongide sabad, kusjuures täpselt 2 sekundi vältel on lühem rong üleni pikemaga kohakuti. Kui pika aja vältel näeb pikemas rongis sõitja aknast ristsuunas välja vaadates lühikest rongi?

5. Kolmnurga ABC mediaanid AD, BE ja CF lõikuvad punktis M. Kas on võimalik, et ringid raadiustega MD, ME ja MF on

a) kõik väiksema pindalaga kui kolmnurk ABC?
b) kõik suurema pindalaga kui kolmnurk ABC?
c) kõik täpselt sama pindalaga nagu kolmnurk ABC?

6. On antud naturaalarv n. Isal ja emal on n last. Leia kõik võimalused, mitmel lapsel selles peres saab olla nii vend kui ka õde.

Matemaatika lahtine võistlus

16. detsember 2017 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Kas leiduvad sellised reaalarvud b, c, p ja q (mis ei pea olema erinevad) ning mittenegatiivsed täisarvud n ja m (mis ka ei pea olema erinevad), et ruutfunktsioonidel $y = x^2 + bx + c$ ja $y = x^2 + px + q$ on vastavalt n ja m erinevat nullkohta ning funktsioonil $y = (x^2 + px + q)^2 + b(x^2 + px + q) + c$ on

a) vähem kui $n + m$ erinevat nullkohta?

b) täpselt $n + m$ erinevat nullkohta?

c) rohkem kui $n + m$ erinevat nullkohta?

2. Täisnurkse kolmnurga kõigi külgede pikkused on täisarvud. Ühe kaateti pikkus on paaritu algarv p. Leia selle kolmnurga ülejäänud kahe külje pikkused.

3. Kas leidub viis erinevat algarvu, millest iga kolme summa on samuti algarv?

4. Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x, y, z korral

$$\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z \geqslant \frac{9y^2 z}{x + y^2 + z}.$$

5. Kolmnurga ABC tipuga A sümmeetriline punkt sirge BC suhtes on A' ja tipuga B sümmeetriline punkt sirge AC suhtes on B'. On teada, et $\angle BA'C = \angle BB'C$. Kas kolmnurga ABC suurim nurk saab olla

a) tipu A juures?

b) tipu B juures?

c) tipu C juures?

6. Olgu n täisarv, $n \geqslant 2$. Laura matemaatikaõpetaja armastab rühmaõpet ja koostab statistika õpetamiseks igas tunnis uued rühmad. Pärast kogu materjali läbivõtmist selgusid järgmised faktid.

1) Iga kaks õpilast olid koos olnud täpselt ühes rühmas.

2) Igas kahes moodustatud rühmas oli täpselt üks ühine õpilane.

Päeval, kui õpiti korrelatsiooni, oli Lauraga ühes rühmas veel täpselt n õpilast. Leia klassi õpilaste arv, kui on teada, et see on suurem kui $n + 2$.

Открытое соревнование по математике

16 декабря 2017 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Учительница начертила на доске пятиугольник, в котором выполняются следующие условия.

1) Найдутся два угла одинаковой величины.
2) Найдутся три угла, величина одного из которых равна сумме величин других двух.
3) Найдутся четыре угла, величина одного из которых равна сумме величин остальных трёх.
4) Найдётся угол, величина которого равна сумме величин остальных четырёх углов.

Найти величины углов этого пятиугольника.

2. В записи

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

между каждыми двумя идущими подряд цифрами ставят знак «плюс» или «минус».

а) Найти наименьшее положительное нечётное число, которое невозможно получить как значение такого выражения.
б) Найти наименьшее положительное чётное число, которое невозможно получить как значение такого выражения.

3. Найдутся ли четыре различных простых числа, сумма любых трёх из которых будет также простым числом?

4. Два поезда двигались по параллельным путям с равномерной скоростью навстречу друг к другу. С момента, когда носы поездов поравнялись, прошло ровно 8 секунд до момента, когда поравнялись хвосты поездов, причём в течении ровно 2 секунд более короткий поезд находился полностью по соседству с более длинным поездом. В течение какого времени пассажир более длинного поезда мог видеть из окна короткий поезд, если смотрел прямо перпендикулярно окну?

5. Медианы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке M. Возможно ли, что круги с радиусами MD, ME и MF

а) имеют все площадь меньше треугольника ABC?
б) имеют все площадь больше треугольника ABC?
в) имеют все точно такую же площадь, что и треугольник ABC?

6. Дано натуральное число n. У папы и мамы n детей. Найти все возможности, у скольких детей в этой семье может иметься как брат, так и сестра.

Открытое соревнование по математике

16 декабря 2017 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Существуют ли такие действительные числа b, c, p и q (не обязательно различные) и целые неотрицательные числа n и m (также не обязательно различные), что квадратичные функции $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + px + q$ обращаются в нуль соответственно в n и m различных точках, а функция $y = (x^2 + px + q)^2 + b(x^2 + px + q) + c$ обращается в нуль

а) меньше чем в $n + m$ различных точках?

б) ровно в $n + m$ различных точках?

в) больше чем в $n + m$ различных точках?

2. В прямоугольном треугольнике длины всех сторон целочисленны. Длина одного катета − нечётное простое число p. Найти длины других двух сторон этого треугольника.

3. Найдутся ли пять различных простых чисел, сумма каждых трёх из которых также является простым числом?

4. Доказать, что для всех действительных положительных чисел x, y, z верно

$$\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z \geqslant \frac{9y^2 z}{x + y^2 + z}.$$

5. Пусть A' точка, симметричная вершине A треугольника ABC относительно прямой BC, и пусть B' точка, симметричная вершине B относительно прямой AC. Известно, что $\angle BA'C = \angle BB'C$. Может ли наибольший угол треугольника ABC быть

а) при вершине A?

б) при вершине B?

в) при вершине C?

6. Пусть n целое число, $n \geqslant 2$. Учитель математики Лауры любит устраивать групповую работу и для обучения статистике на каждом уроке составлял новые группы. После прохождения всего материала выяснилось следующее.

1) Каждые два ученика были вместе ровно в одной группе.

2) Для каждых двух групп есть ровно один ученик, участвовавший в обоих.

В день, когда проходили корреляцию, с Лаурой в одной группе было ещё ровно n учеников. Найти количество учеников в классе, если известно, что оно больше $n + 2$.

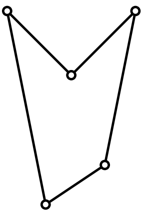
Lahendused

1. *Vastus:* 270°, 135°, $67{,}5^\circ$, $33{,}75^\circ$, $33{,}75^\circ$.

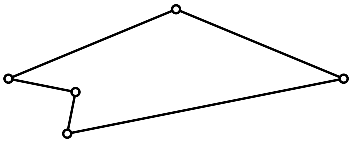
Olgu tahvlile joonestatud viisnurga nurkade suurused kahanemise järjestuses $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta \geqslant \varepsilon$. Viisnurga kõigi viie nurga suuruste summa on $(5-2) \cdot 180^\circ$ ehk $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$.

Nurk, mille suurus võrdub ülejäänud nelja nurga suuruste summaga, on ilmselt neist neljast nurgast suurem. Seega $\alpha = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \dfrac{540^\circ}{2} = 270^\circ$.

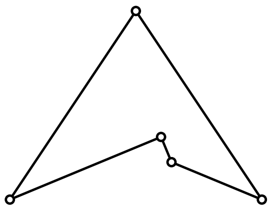
Nurk, mille suurus võrdub kolme nurga suuruste summaga, ei saa olla suurusega α, sest siis oleks $\varepsilon = 0^\circ$. Et ta peab olema neist kolmest nurgast suurem, siis $\beta = \gamma + \delta + \varepsilon = \dfrac{270^\circ}{2} = 135^\circ$. Analoogselt ei saa nurk, mille suurus võrdub kahe nurga suuruste summaga, olla suurusega α ega β, mistõttu $\gamma = \delta + \varepsilon = \dfrac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$. Lõpuks ei saa viisnurgas olla rohkem nurki suurusega 270°, 135° ega $67{,}5^\circ$, mistõttu $\delta = \varepsilon = \dfrac{67{,}5^\circ}{2} = 33{,}75^\circ$.



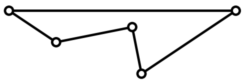
Joonis 1



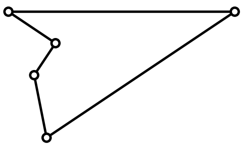
Joonis 2



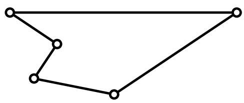
Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6

Märkus. Joonised 1–6 kujutavad kõik võimalikud viisid nurkade paiknemiseks viisnurgas.

2. *Vastus:* a) 47; b) 2.

Lahendus 1.

a) Kõik positiivsed paaritud arvud kuni 45-ni on võimalik saavutada järgmisel viisil:

$0+1+2+3+4-5+6+7-8-9=1$	$0+1+2+3+4+5+6+7+8-9=27$
$0+1+2+3-4+5+6+7-8-9=3$	$0+1+2+3+4+5+6+7-8+9=29$
$0+1+2-3+4+5+6+7-8-9=5$	$0+1+2+3+4+5+6-7+8+9=31$
$0+1-2+3+4+5+6+7-8-9=7$	$0+1+2+3+4+5-6+7+8+9=33$
$0-1+2+3+4+5+6+7-8-9=9$	$0+1+2+3+4-5+6+7+8+9=35$
$0+1+2+3+4+5+6+7-8-9=11$	$0+1+2+3-4+5+6+7+8+9=37$
$0+1+2+3+4+5+6-7+8-9=13$	$0+1+2-3+4+5+6+7+8+9=39$
$0+1+2+3+4+5-6+7+8-9=15$	$0+1-2+3+4+5+6+7+8+9=41$
$0+1+2+3+4-5+6+7+8-9=17$	$0-1+2+3+4+5+6+7+8+9=43$
$0+1+2+3-4+5+6+7+8-9=19$	$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
$0+1+2-3+4+5+6+7+8-9=21$	
$0+1-2+3+4+5+6+7+8-9=23$	
$0-1+2+3+4+5+6+7+8-9=25$	

Järgmine paaritu arv 47 avaldise väärtusena tekkida ei saa, sest on suurem kui arvude 0 kuni 9 summa.

b) Tekkivas summas on täpselt 5 paaritut liidetavat. Seega saab avaldise väärtus olla ainult paaritu. Järelikult vähim positiivne paarisarv, mida pole võimalik avaldise väärtusena saada, on 2.

Lahendus 2. Olgu plussmärgiga liidetavate summa x ja miinusmärgiga liidetavate summa (absoluutväärtus) y. Siis avaldise väärtus v võrdub vahega $x-y$ ning samas $x+y=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Seega $v=45-2y$.

a) Et $45-2y \leqslant 45$, siis 45-st suuremad arvud avaldise väärtusena tekkida ei saa. Näitame järgnevas, et kõik positiivsed paaritud arvud kuni 45-ni saavad avaldise väärtusena tekkida; sellest järeldub, et vähim paaritu arv, mida tekkida ei saa, on 47.

Eelneva põhjal $y=\dfrac{45-v}{2}$. Et tekitada avaldise väärtust v, tuleb miinusmärk panna selliste numbrite ette, mis annaksid summaks arvu $\dfrac{45-v}{2}$. Kui v on paaritu arv 1 ja 45 vahel, siis $\dfrac{45-v}{2}$ on mittenegatiivne täisarv 0 ja 22 vahel. Iga selline täisarv on teatud positiivsete numbrite summana leitav: arvud 1 kuni 9 on ise numbrite seas, arvud 10 kuni 17 saame 9 ja veel ühe positiivse numbri summana ning arvud 18 kuni 22 saame 9, 8 ja vahemikust 1 kuni 5 sobivalt valitud numbri summana; arvule 0 vastab variant, kus iga numbri ees on pluss.

b) Arv 2 ei teki avaldise väärtusena, sest võrrand $2 = 45 - 2y$ annab $y = 21{,}5$, mis pole võimalik liidetavate täisarvulisuse tõttu. Arv 2 on ka vähim positiivne paarisarv.

3. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Sobivad näiteks algarvud 5, 7, 17 ja 19. Nende kolmekaupa summad on algarvud 29, 31, 41 ja 43.

Lahendus 2. Valime esmalt kolm järjestikust algarvu 5, 7, 11, mille summa on algarv 23. Neljas algarv p peab olema selline, et $p+12$, $p+16$ ja $p+18$ on algarvud. Ei sobi $p = 2$ ega $p = 3$, sest $p + 12$ poleks algarv. Samuti ei sobi algarvud, mis annavad 3-ga jagades jäägi 2, sest nende puhul $p + 16$ jagub 3-ga. Kui p annaks 5-ga jagades jäägi 2, 3 või 4, siis vastavalt $p+18$, $p+12$ ja $p+16$ poleks algarv. Kokkuvõttes peab p olema paaritu algarv, mis annab nii 3-ga kui ka 5-ga jagades jäägi 1, teisi sõnu – algarv, mis annab 30-ga jagades jäägi 1. Proovides läbi arvud $31, 61, 91, \ldots$ leiame, et sobib $p = 181$, sest 181, 193, 197 ja 199 on kõik algarvud.

Märkus 1. Lihtne on veenduda, et 2 ega 3 ei saa esineda üheski ülesande tingimusi rahuldavas nelikus. Algarvu 2 summa kahe paaritu algarvuga oleks paarisarv, seega kordarv. Kui aga üks algarvudest oleks 3, siis kui ülejäänud algarvude seas leidub kaks, mis annavad 3-ga jagades erinevad jäägid, jagub nende kahe algarvu ja arvu 3 summa 3-ga, kui aga ülejäänud algarvud annavad kõik 3-ga jagades ühe ja sama jäägi, jagub nende kolme arvu summa 3-ga.

Märkus 2. On võimalik leida ka sobiv näide komplektist nelja järjestikuse algarvuga. Sellised on 19, 23, 29 ja 31. Nende kolmekaupa summad 71, 73, 79 ja 83 on samuti järjestikused algarvud.

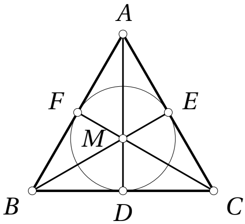
4. *Vastus:* 3 s.

Nähku pikemas rongis sõitja lühemat rongi x ja lühemas rongis sõitja pikemat rongi y sekundi vältel. See tähendab, et lühema rongi pikkuse läbimiseks rongide summaarse kiirusega kulub x sekundit, pikema rongi pikkuse läbimiseks sama kiirusega aga y sekundit. Hetkest, kui rongide ninad on kohakuti, kulub $x + y$ sekundit hetkeni, kui kohakuti on rongide sabad, sest see võrdub ajaga, mis kulub rongide pikkuste summa läbimiseks rongide summaarse kiirusega. Seejuures on lühem rong pikemaga üleni kohakuti $y - x$ sekundi vältel, sest see võrdub ajaga, mis kulub rongide pikkuste vahe läbimiseks rongide summaarse kiirusega. Võrrandisüsteemist

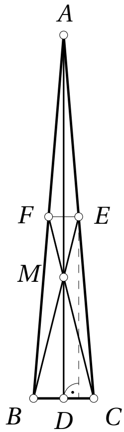
$$\begin{cases} y + x = 8 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

saame $x = 3$.

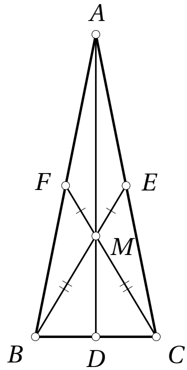
5. *Vastus:* a) jah; b) jah; c) ei.



Joonis 7



Joonis 8



Joonis 9

a) Olgu kolmnurk ABC võrdkülgne (joonis 7). Et selle kolmnurga mediaanid on ühepikkused, asuvad punktid D, E ja F punktist M võrdsel kaugusel ehk ühel ja samal ringjoonel, mille keskpunkt on M. Piisab näidata, et selle ringjoone pindala on väiksem kolmnurga ABC pindalast. Et võrdkülgse kolmnurga mediaanid on ühtlasi kõrgused ehk külgedega risti, siis see ringjoon puutub külgi BC, CA ja AB vastavalt punktides D, E ja F. Järelikult on tegu kolmnurga ABC siseringjoonega. Siseringjoone pindala on aga tõepoolest väiksem kui kolmnurga pindala.

b) Olgu $|AB| = |AC|$ ning $|BC| = 1$ ja $|AD| = 6$ (joonis 8). Et võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud mediaan on ühtlasi kõrgus, on selle kolmnurga pindala $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6$ ehk 3. Teisalt $|BE| = |CF| > \frac{1}{2}|AD|$, sest EF on kolmnurga ABC küljega BC paralleelne kesklõik ja $\frac{1}{2}|AD|$ on kesklõigu EF ja külje BC vaheline kaugus (joonisel 8 punktiiriga). Järelikult $|ME| = |MF| > \frac{1}{6}|AD| = 1$. Seega ringidel raadiusega ME ja MF on pindala suurem kui π, mis omakorda on suurem kolmnurga ABC pindalast 3. Ring raadiusega MD on samuti suurema pindalaga kui kolmnurk ABC, sest $|MD| = \frac{1}{3}|AD| = 2 > 1$.

c) Kui ringid raadiusega MD, ME ja MF oleksid sama pindalaga nagu kolmnurk ABC, peaksid nende ringide raadiused olema võrdsed ehk $|MD| = |ME| = |MF|$. See tähendaks, et ka punktist M teisele poole jäävad mediaanide osad on võrdsed ehk $|MA| = |MB| = |MC|$. Näitame, et siis peab kolmnurk ABC olema võrdkülgne. Tõepoolest, võrdustest $|ME| = |MF|$ ja $|MB| = |MC|$ tulenevalt on kolmnurgad BMF ja CME võrdsed tunnuse KNK põhjal (joonis 9), mistõttu $|BF| = |CE|$ ja ühtlasi $|AB| = |AC|$. Sarnaselt näitame, et $|AB| = |BC|$. Kuid võrdkülgse kolmnurga puhul ei ole ringid raadiusega MD, ME ja MF kolmnurgaga võrdse pindalaga, nagu nägime osas a).

6. *Vastus:* 0, kui $n \leqslant 2$; 0 või 2, kui $n = 3$; 0, $n - 1$ või n, kui $n \geqslant 4$.

Lahendus 1. Kui kõik lapsed on ühest soost, ei saa kellelgi olla nii venda kui ka õde. Sel juhul on nõutud omadusega laste arv 0 sõltumata nende arvust n.

Kui leidub mõlemast soost lapsi, aga vähemalt ühest soost lapsi on täpselt 1, siis sellel lapsel pole venda (kui ta on poiss) või õde (kui ta on tüdruk). Kui ka teisest soost lapsi on vaid 1 ehk $n = 2$, siis on küsitud omadusega laste arv 0, kui aga $n \geqslant 3$, siis on kõigil ülejäänud lastel olemas nii vend kui ka õde, mistõttu ülesande tingimust rahuldavaid lapsi on $n - 1$.

Kui mõlemast soost lapsi on vähemalt 2, siis on kõigil lastel vend ja õde ehk nõutud omadusega lapsi on n. See saab juhtuda, kui $n \geqslant 4$.

Kokkuvõttes saame, et juhul $n \leqslant 2$ on küsitud omadusega lapsi kindlasti 0, juhul $n = 3$ on neid kas 0 või $n - 1$ (ehk 2) ning juhul $n \geqslant 4$ kas 0, $n - 1$ või n.

Lahendus 2. Selleks, et mõnel lapsel oleks nii vend kui ka õde, peab peres kasvama vähemalt 3 last. Seega kui $n \leqslant 2$, siis on ülesande tingimust rahuldavaid lapsi 0. Eeldame järgnevas, et $n \geqslant 3$. On selge, et samast soost lapsed kas rahuldavad kõik ülesande tingimust või ei rahulda ükski. Selleks, et mingist soost lapsed tingimust ei rahuldaks, peab kas neid olema täpselt 1 või vastassoost lapsi 0. Esimesel juhul on tingimust rahuldavaid lapsi $n-1$ (sest $n \geqslant 3$ tõttu on vastassoost lapsi siis vähemalt 2), teisel juhul 0. Seega juhul $n \geqslant 3$ tulevad kõne alla vastusevariandid 0, $n - 1$ ja n. Jääb veel tähele panna, et mõlemast soost lapsed saavad tingimust rahuldada vaid juhul $n \geqslant 4$.

Lahendused

1. *Vastus:* a) jah; b) jah; c) jah.

Lahendus 1.

a) Valime $b = 0$, $c = 1$, $p = 0$, $q = 0$. Siis $n = 0$ ja $m = 1$, sest funktsioonil $y = x^2 + 1$ nullkohad puuduvad ja funktsioonil $y = x^2$ on üks nullkoht 0. Funktsioonil $y = (x^2)^2 + 1$ aga nullkohad puuduvad, st tal on vähem kui $0 + 1$ nullkohta.

b) Valime $b = 0$, $c = 1$, $p = 0$, $q = 1$. Siis $n = 0$ ja $m = 0$, sest funktsioonil $y = x^2 + 1$ nullkohad puuduvad. Ka funktsioonil $y = (x^2 + 1)^2 + 1$ nullkohad puuduvad ehk tal on täpselt $0 + 0$ nullkohta.

c) Valime $b = -4$, $c = 4$, $p = 0$ ja $q = 1$. Siis $n = 1$ ja $m = 0$, sest funktsioonil $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ on üks nullkoht 2 ja funktsioonil $y = x^2 + 1$ nullkohad puuduvad. Seevastu on funktsioonil $y = (x^2 + 1)^2 - 4(x^2 + 1) + 4 = (x^2 - 1)^2$ nullkohad 1 ja -1, mis tähendab, et tal on rohkem kui $1 + 0$ nullkohta.

Lahendus 2. Fikseerime $p = q = 0$, siis on fikseeritud ka $m = 1$. Otsime funktsioone $y = x^2 + bx + c$, mille puhul $x^2 + bx + c = (x - d)^2 - 1$. Sellistel funktsioonidel on nullkohad $d - 1$ ja $d + 1$, mistõttu $n = 2$ ja järelikult $n + m = 3$. Näitame järgnevas, et parameetrit d varieerides on võimalik funktsiooni $y = (x^2 + px + q)^2 + b(x^2 + px + q) + c = x^4 + bx^2 + c = (x^2 - d)^2 - 1$ nullkohtade arvuks tekitada 2, 3 ja 4.

- Kui $d = 0$, siis funktsiooni $y = (x - d)^2 - 1$ üks nullkoht on -1 ja teine on 1. Funktsioonil $y = (x^2 - d)^2 - 1$ on siis kaks nullkohta 1 ja -1.
- Kui $d = 1$, siis funktsiooni $y = (x - d)^2 - 1$ üks nullkoht on 0 ja teine 2. Funktsiooni $y = (x^2 - d)^2 - 1$ nullkohad on järelikult 0, $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.
- Kui $d = 2$, siis funktsiooni $y = (x - d)^2 - 1$ üks nullkoht on 1 ja teine 3. Funktsiooni $y = (x^2 - d)^2 - 1$ nullkohad on järelikult 1, -1, $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$.

Märkus. Lahenduse 2 kontekstis on võimalik funktsiooni $y = (x^2 - d)^2 - 1$ nullkohtade arvuks saada ka 0 ja 1. Nimelt kui $d = -1$, siis funktsiooni $y = (x - d)^2 - 1$ üks nullkoht on negatiivne ja teine on 0, mistõttu funktsioonil $y = (x^2 - d)^2 - 1$ on vaid üks nullkoht 0. Kui aga $d = -2$, siis funktsiooni $y = (x - d)^2 - 1$ nullkohad on negatiivsed, mistõttu funktsioonil $y = (x^2 - d)^2 - 1$ nullkohti pole.

2. *Vastus:* $\dfrac{p^2-1}{2}$ ja $\dfrac{p^2+1}{2}$.

Lahendus 1. Olgu teise kaateti pikkus b ja hüpotenuusi pikkus c. Pythagorase teoreemist antud kolmnurgas saame $p^2+b^2=c^2$, mis omakorda annab $p^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$. Küljepikkuste positiivsuse tõttu $c-b<c+b$. Et p on algarv, siis arvu p^2 ainsad tegurid on 1, p ja p^2. Kokkuvõttes on ainus võimalus $c-b=1$ ja $c+b=p^2$. Lahendades võrrandisüsteemi, saame $b=\dfrac{p^2-1}{2}$ ja $c=\dfrac{p^2+1}{2}$.

Lahendus 2. On teada, et kõik Pythagorase kolmikud (st positiivsete täisarvude kolmikud (a,b,c), mis rahuldavad tingimust $a^2+b^2+c^2$) esituvad kujul $(d(m^2-n^2), 2dmn, d(m^2+n^2))$ või $(2dmn, d(m^2-n^2), d(m^2+n^2))$, kus m ja n on eri paarsusega ühistegurita positiivsed täisarvud ja $m>n$. Seega antud ülesandes $p=d(m^2-n^2)$ või $p=2dmn$. Et p on paaritu, on teine variant võimatu. Seega $d=1$ ja $m^2-n^2=p$ või $d=p$ ja $m^2-n^2=1$. Jällegi on teine variant võimatu, sest positiivsete täisarvude ruudud erinevad üksteisest rohkem kui 1 võrra. Võrdusest $p=m^2-n^2$ saame ainsa võimalusena $m-n=1$, $m+n=p$, kust $m=\dfrac{p+1}{2}$, $n=\dfrac{p-1}{2}$. Kolmnurga teise kaateti pikkus $2dmn$ on siis võrdne arvuga $\dfrac{p^2-1}{2}$ ja hüpotenuusi pikkus $d(m^2+n^2)$ võrdne arvuga $\dfrac{p^2+1}{2}$.

3. *Vastus:* ei.

Oletame väitevastaselt, et leidub viis tingimustele vastavat algarvu. Kui nende seas leidub kolm sellist, mis kõik annavad 3-ga jagamisel erinevad jäägid, siis liites ülejäänud kahe algarvu summale üksikult need kolm algarvu, saame kolm summat, mis kõik annavad 3-ga jagamisel erinevad jäägid. Neist kolmest summast üks jagub 3-ga ega ole järelikult algarv. Kui aga antud viie algarvu jagamisel 3-ga tekib ülimalt 2 erinevat jääki, siis leidub Dirichlet' printsiibi põhjal nende algarvude seas kolm sellist, mis annavad 3-ga jagades ühe ja sama jäägi. Nende kolme summa aga jagub samuti 3-ga, mistõttu pole algarv.

4. *Lahendus 1.* Tuues kõik liikmed ühele poole ja viies nad ühisele nimetajale, saame samaväärse võrratuse

$$\frac{y^2z(x+y^2+z)+xy^2(x+y^2+z)+xz(x+y^2+z)-9xy^2z}{x(x+y^2+z)} \geqslant 0.$$

Et x, y, z on positiivsed, siis ka saadud murru nimetaja $x(x+y^2+z)$ on positiivne. Järelikult on vasakul pool olev murd mittenegatiivne parajasti siis, kui tema lugeja on mittenegatiivne. Avades lugejas sulud ja koondades xy^2z-ga liikmed paremale, saame samaväärse võrratuse

$$x^2y^2+xy^4+y^2z^2+y^4z+x^2z+xz^2 \geqslant 6xy^2z.$$

See võrratus aga järeldub otse aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest arvude x^2y^2, xy^4, y^2z^2, y^4z, x^2z ja xz^2 jaoks.

Lahendus 2. Korrutades võrratuse mõlemad pooled suurusega $\dfrac{x+z+y^2}{y^2z}$, saame samaväärse võrratuse

$$\left(\frac{y^2z}{x}+y^2+z\right)\cdot\left(\frac{x+z+y^2}{y^2z}\right)\geqslant 9.$$

See võrratus teisendub omakorda kujule

$$\left(\frac{y^2z}{x}+y^2+z\right)\cdot\left(\frac{x}{y^2z}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9.$$

Viimane aga tuleneb Cauchy-Schwarzi võrratusest, rakendades seda arvukomplektidele $\left(\dfrac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}}, y, \sqrt{z}\right)$ ja $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y\sqrt{z}}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$.

Märkus. Lahendust 2 saab lõpetada ka teisiti, rakendades Cauchy-Schwarzi võrratuse asemel kummaski sulus eraldi aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, st korrutades võrratuste $\dfrac{y^2z}{x}+y^2+z\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{y^4z^2}{x}}$ ja $\dfrac{x}{y^2z}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^4z^2}}$ vastavad pooled.

Lahendus 3. Rakendades aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust arvudele $\dfrac{y^2z}{x}$, y^2 ja z, saame

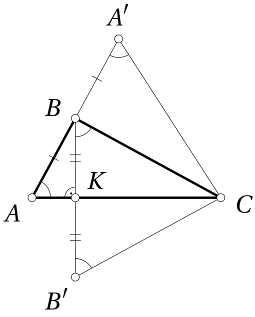
$$\frac{1}{3}\left(\frac{y^2z}{x}+y^2+z\right)\geqslant\frac{3}{\frac{x}{y^2z}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z}}=\frac{3y^2z}{x+z+y^2},$$

kust poolte korrutamisel 3-ga tekib vajalik võrratus.

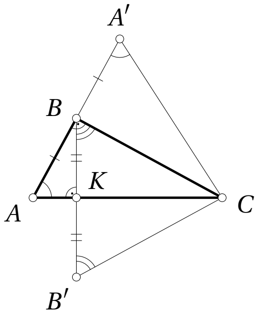
5. *Vastus:* a) ei; b) jah; c) jah.

Lahendus 1. Olgu kolmnurga ABC tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt K. Sümmeetria tõttu $\angle BA'C=\angle BAC$ ja $\angle BB'C=\angle KB'C=\angle KBC$.

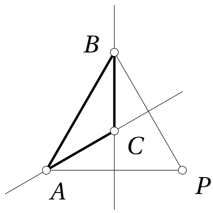
a) Ülesande tingimuse põhjal $\angle BAC=\angle KBC$ (joonis 10). Et kolmnurga KBC tipu K juures on täisnurk, siis $\angle KBC<90^\circ$. Kui nüüd kolmnurga ABC suurim nurk oleks tipu A juures, peaks kolmnurk olema teravnurkne, mis tähendab, et K asub lõigul AC. Siis aga saaksime $\angle ABC>\angle KBC=\angle BAC$, mis on vastuolus oletusega, et kolmnurga ABC suurim nurk asub tipu A juures.



Joonis 10



Joonis 11



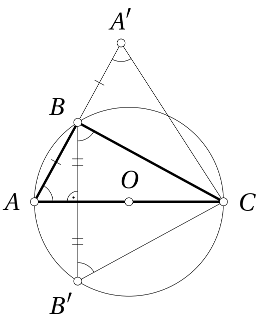
Joonis 12

b) Olgu kolmnurga ABC tipu B juures täisnurk, see on ka kolmnurga suurim nurk (joonis 11). Kolmnurgad BAC ja KBC on sarnased, sest mõlemal on esimese tipu juures täisnurk ja teravnurk tipu C juures on ühine. Seega $\angle BAC = \angle KBC$, millest järeldub ülesande võrdus $\angle BA'C = \angle BB'C$.

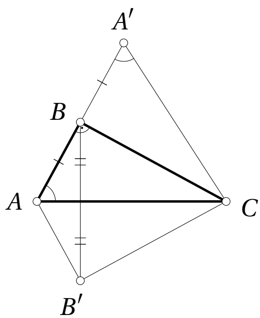
c) Olgu ABP võrdkülgne kolmnurk keskpunktiga C (joonis 12). Ilmselt on punkt P nii punktiga A sümmeetriline sirge BC suhtes kui ka punktiga B sümmeetriline sirge AC suhtes. Seega defineerides $A' = B' = P$, on ülesande tingimused täidetud, sest võrdus $\angle BA'C = \angle BB'C$ kehtib triviaalselt. Kolmnurga ABC tipu C juures on nurk suurusega $2 \cdot 60^\circ$ ehk 120°, mis on ka suurim nurk.

Lahendus 2.

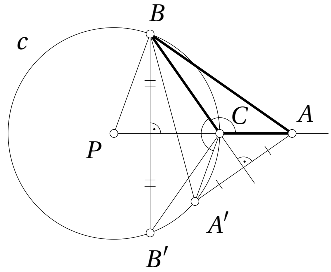
a) Sümmeetria tõttu $\angle BA'C = \angle BAC$, niisiis tuleneb eeldusest võrdus $\angle BAC = \angle BB'C$. Oletame, et kolmnurga ABC suurim nurk on tipu A juures. Siis nurk tipu C juures on terav, mis tähendab, et A ja B' asuvad samal pool sirget BC. Võrdusest $\angle BAC = \angle BB'C$ järeldub nüüd,



Joonis 13



Joonis 14



Joonis 15

et punkt B' asub kolmnurga ABC ümberringjoonel (joonis 13). Seega sirge AC on kolmnurga ABC ümberringjoone kõõlu BB' keskristsirge. Ringjoone kõõlu keskristsirge aga läbib selle ringjoone keskpunkti. Järelikult on kõõl AC kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Siis aga on tipu B juures täisnurk ja nurk tipu A juures pole suurim.

b) Olgu kolmnurga ABC tipu B juures täisnurk, see on ka kolmnurga suurim nurk (joonis 14). Sümmeetria tõttu $\angle AB'C = \angle ABC = 90^\circ$. Seega punktid A, B, C, B' paiknevad ühel ringjoonel, kusjuures A ja B' asuvad samal pool sirget BC. Järelikult $\angle BA'C = \angle BAC = \angle BB'C$.

c) Valime punktid B ja C mingil ringjoonel c keskpunktiga P nii, et $\angle BPC < 90^\circ$. Olgu B' punktiga B sümmeetriline ringjoone punkt sirge CP suhtes. Olgu A' selline punkt ringoonel c, et kehtib võrdus $\angle A'CB = 180^\circ - \angle PCB$ (joonis 15). Selline valik on võimalik: liikudes punktiga A' mööda ringjoone c pikemat kaart BC, on võimalikud nurga $\angle A'CB$ kõik suurused kuni väärtuseni $180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPC$, kuid $180^\circ - \angle PCB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BPC < 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPC$. Olgu nüüd A punkti A' peegeldus sirge BC suhtes; et $\angle ACB = \angle A'CB = 180^\circ - \angle PCB$, asub A sirgel CP ehk sirged CP ja AC langevad kokku. Ülesande tingimused on täidetud, sest $\angle BA'C$ ja $\angle BB'C$ on ringjoone c samale kaarele BC toetuvad piirdenurgad.

6. *Vastus:* $n^2 + n + 1$.

Ülesande tingimuste kohaselt oli ühes rühmas $n+1$ õpilast, klassis aga kokku rohkem kui $n + 2$ õpilast. Et iga kaks õpilast kuulusid mingisse rühma koos, peab rohkem kui ühe õpilasega rühmi olema rohkem kui 1. Kui mingi õpilane C moodustaks üksinda rühma, siis peaks see õpilane kuuluma igasse rühma, iga C-st erinev õpilane aga kuuluks täpselt ühte rühma (sellesse, milles ta on koos C-ga). See aga tähendaks, et leidub ainult üks rohkem kui ühe õpilasega rühm ja sellesse kuuluvad klassi kõik õpilased. Seega ühest õpilasest koosnevaid rühmi olla ei saa. Edasi vaatleme kahte juhtu.

- Oletame, et leiduvad sellised kaks rühma, et klassi iga õpilane kuulub neist vähemalt ühte. Olgu C nende rühmade ühine õpilane ning need rühmad ise olgu $\{C, A_1, \ldots, A_k\}$ ja $\{C, B_1, \ldots, B_l\}$. Et ükski kaks õpilast ei ole koos rohkem kui ühes rühmas, saavad ülejäänud rühmad olla ainult kujul $\{A_i, B_j\}$, kus $i = 1, \ldots, k$ ja $j = 1, \ldots, l$, ning et iga kaks õpilast on ühes rühmas koos, peavad kõik sellisel kujul rühmad ka leiduma. Kuna aga igal kahel sellisel rühmal peab olema ühine õpilane, siis $k = 1$ või $l = 1$. Olgu üldisust kitsendamata $k = 1$; siis oleks ühes rühmas $l + 1$ ja kõigis ülejäänud rühmades 2 ning klassis kokku $l + 2$ õpilast. Et Laura rühm korrelatsioonitunnis sisaldab $n + 1$ õpilast ning $n + 1 > n \geqslant 2$, peab see olema suur rühm õpilaste arvuga $l + 1$. Järelikult $l = n$ ehk klassis on $n + 2$ õpilast, kuid ülesande tingimuste järgi peab õpilasi olema rohkem.
- Eeldame nüüd, et ei leidu kaht sellist rühma, et klassi iga õpilane neist vähemalt ühte kuulub. Valime suvaliselt kaks rühma $\mathscr{R}$ ja $\mathscr{S}$ ning olgu C suvaline õpilane, kes kummassegi rühma ei kuulu. Olgu m nende rühmade arv, millesse C kuulub. Igas neist m rühmast on rühmaga $\mathscr{R}$ täpselt üks ühine õpilane; need ühised õpilased on kõik erinevad, sest igas kahes rühmas, millesse C kuulub, on C ainus ühine õpilane. Rohkem õpilasi rühmas $\mathscr{R}$ olla ei saa, kuna iga õpilane rühmas $\mathscr{R}$ peab kuuluma mingisse rühma koos C-ga. Seega on rühmas $\mathscr{R}$ täpselt m õpilast. Samamoodi saame, et rühmas $\mathscr{S}$ on täpselt m õpilast. Kuna $\mathscr{R}$ ja $\mathscr{S}$ on valitud suvaliselt, siis järeldub sellest, et igas rühmas on ühepalju õpilasi ehk m tükki. Et korrelatsioonitunnis oli Laura rühmas $n + 1$ õpilast, siis $m = n + 1$. Klassi õpilased võib kokku lugeda õpilase C rühmade kaupa: neid rühmi on $n + 1$ ja igasse kuulub peale C veel n õpilast, mistõttu klassi õpilaste arv on $1 + (n + 1)n$ ehk $n^2 + n + 1$. Arv sobib ülesande tingimustega, sest $n \geqslant 2$ korral $n^2 + n + 1 > n + 2$.

Märkus. Ülesande tingimusi on võimalik täita. Näiteks juhul $n = 2$ sobib 7 õpilase A, B, C, D, E, F, G jaotus 7 rühma $\{A, B, C\}$, $\{A, D, E\}$, $\{A, F, G\}$, $\{B, D, F\}$, $\{B, E, G\}$, $\{C, D, G\}$, $\{C, E, F\}$. Üldisemalt on võimalik tõestada, et kui n on algarvu aste, siis nõutud konstruktsioon leidub. Komplekti $n^2 + n + 1$ objektist, millel on määratud $n + 1$ elemendiga rühmad, nii et on täidetud käesoleva ülesande kaks tingimust, nimetatakse kõrgemas matemaatikas *n-ndat järku projektiivseks tasandiks*; näiteks lõigu algul esitatud konstruktsioon on 2. järku projektiivne tasand. Projektiivse tasandi olemasolu või puudumine mitme erineva algarvuga jaguvate naturaalarvude n jaoks on üldjuhul lahendamata probleem; ühtki näidet sellisest projektiivsest tasandist teada ei ole.

Hindamisskeemid

1. *(Kaur Aare Saar)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õige vastus: 1 p
- Esitatud loogiline mõttekäik ülesande tingimusi rahuldava viisiku leidmiseks, kus nurkade suurused on konkreetsed väärtused või ka ühest parameetrist sõltuval kujul (nt $\alpha, \alpha, 2\alpha, 4\alpha, 8\alpha$): 2 p
- Näidatud, et saadud lahend on ainus: 4 p

  Sealhulgas:
  - Lahendatud viisil, mille korral lahendi unikaalsuse näitamine on lihtsustatud (näiteks alustades viimasest antud tingimusest): *2 p*

Enimlevinud veaks osutus ootuspäraselt näite konstrueerimine põhjendamata, miks rohkem lahendeid leiduda ei saa. Üllatavalt palju lahendajaid oli teinud elementaarseid arvutusvigu.

2. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a-osa täielik lahendus: 4 p

  Sealhulgas:
  - Antud õige vastus 47: *1 p*
  - Näidatud, et paaritud arvud 1 kuni 45 on avaldise väärtusena esituvad: *3 p*
- b-osa täielik lahendus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Antud õige vastus 2: *1 p*
  - Põhjendatud, et ükski paarisarv (või konkreetselt arv 2) ei esitu avaldise väärtusena: *2 p*

Ainult summa $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ arvutamise eest punkte ei antud. Osalise läbivaatuse eest sai a-osas punkti, kui oli korrektselt läbi tehtud ligemale pooled paaritud arvud või ka väiksem hulk, kui seal paistis olevat mingi süsteemi alge. (Ühes töös oli korrektne läbivaatus 39-ni, mille eest andsime 2 punkti.) Selgituse eest, et ühe liidetava märgi muutmisel muutub summa kahekordse selle liidetava võrra, anti 1 punkt kummagi osa arvestuses, sest see on mõlemas osas oluline tähelepanek.

Rohkem kui ühes töös esines mitmeid ootamatuid vääritimõistmisi. Kõige sagedasem oli selline, kus tehtemärke pandi ainult poolte numbripaaride vahele (nt esimene 0 ja 1 vahele, järgmine 2 ja 3 vahele jne), numbrid ilma nende vahel oleva tehtemärgita aga loeti kahekohaliseks arvuks. Teine oli selline, kus millegipärast otsiti vähimat sellist arvu, mida just on avaldise väärtusena võimalik saada (nt a-osas anti siis vastuseks 1). Veel üks tüüpiline valearusaam väljendus a-osa kohta kirjutatud mõttekäigus „vastust ei ole, sest vähim positiivne paaritu arv on 1, aga 1 on avaldise väärtusena võimalik saada“.

Mitmes töös anti b-osa vastuseks 0, kuigi see pole positiivne arv. Need tööd ei saanud b-osa vastuse eest ettenähtud punkti. Umbes samapalju oli töid, kus vastusele 0 lisati kommentaar „või 2, kui 0 ei loeta paarisarvuks“. Sel juhul andsime punkti, kuid märgime, et toodud põhjendus ei sobi: 0 on vale vastus mitte seetõttu, justkui ta poleks paaris, vaid seetõttu, et ta pole positiivne.

3. *(Jaan Toots)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt:

- Täislahendus (näide tingimusi täitvast 4 algarvust): 7 p
- Tähelepanek, et 2 ei saa esineda üheski tingimusi rahuldavas nelikus: 1 p

Tüüpiliseks veaks oli arvude algarvulisuse valesti määramine ning seega vastuseks tingimusi mitte rahuldava neliku pakkumine, kas arvude endi või nende summade poolest. Kuna ülesanne seisnes õige näite leidmises, ei olnud punkte võimalik vigase pakkumise eest saada. Ainus kasulik tähelepanek, mida osalistes lahendustes (kus üritati leida näidet või hoopis tõestada, et sobivat nelikut ei leidu) leidus, oli arvu 2 nelikusse mittesobivuse põhjendamine.

4. *(Markus Rene Pae)*

Kuna ülesannet saab hakata lahendama mitme erineva lähenemisviisiga (tekstülesande kujul, füüsikaliselt taustsüsteemi vahetades, graafiliselt või mõnel muul viisil) ning ammendavalt põhjendatud lahenduskäike esines võrdlemisi palju, siis andsime tüüpiliste mõttekäikude eest punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- On kolitud ümber pikema/lühema rongiga seotud taustsüsteemi, kuid suhtelise kiiruse arvestamisel oli tehtud progresseeruv viga: 5 p
- Leitud on vastupidine aeg – mil lühemas rongis olev reisija näeb pikemat rongi: 5 p
- Leitud on aeg, mil rongid ei olnud kohakuti: 4 p

- ◦ Üherealiselt (ilma põhjendusteta) esitatud vastus: 0 p

Kuigi ülesanne oleks sobinud oma olemuse poolest väga hästi ka mõnele füüsikavõistlusele, oli seda üldjoontes talvise matemaatika lahtise võistluse raames väga hästi lahendatud. Kõige sagedasematest lahendusmeetoditest saab esile tõsta kaks:

- oli ümber kolitud taustsüsteemi, kus pikem rong oli paigal ning lühem rong sõitis selle suhtes kiirusel v. Seejärel oli jõutud järeldusele, et rongide pikkuste summa on neli korda suurem rongide pikkuste vahest. Lühema rongi pikkuse läbijagamisel rongide suhtelise kiirusega annab lõppvastuse.
- oli avaldatud aeg, mil rongid ei olnud tervenisti kohakuti (6 sekundit). Seejärel oli väidetud, et kui vaatleja asuks pikema rongi ninas, siis ta näeks lühemat rongi poole sellest ajast ehk 3 sekundit.

5. *(Oleg Košik)*

Lahenduste järgmiste osade eest antud punktid summeeriti.

- ◦ Osa a): 2 p

  Sealhulgas:
  - Idee, et sobib võrdkülgne kolmnurk: *1 p*
  - Tõestatud, võrdkülgne kolmnurk tõesti sobib: *1 p*
- ◦ Osa b): 3 p

  Sealhulgas:
  - Kirjeldatud sobiv näide: *1 p*
  - Tõestatud, et näide rahuldab tingimusi: *2 p*
- ◦ Osa c): 2 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et mediaanid on võrdsed: *1 p*
  - Tõestatud, et kolmnurk peab olema võrdkülgne: *1 p*

Osade a) ja b) kohta märgime, et joonis üksi ei ole matemaatikas tõestus, nagu ei sobi tõestusena ka ligikaudsed mõõtmised joonisel! Joonis on vaid abivahend lahenduse või tõestuse kirjapanekuks. Osa a) tõestuse puhul loeti piisavaks näiteks ära märkimist, et võrdkülgse kolmnurga puhul muutub iga vaadeldav ringjoon kolmnurga siseringjooneks, mis asub tervenisti kolmnurga sees.

Osa c) puhul rõhutame, et ka need väited, mis tunduvad intuitiivselt loogilised, võivad vajada korralikku põhjendust. Nii väga paljud võtsid ilma tõestuseta, et kui kolmnurga mediaanid on võrdsed, peab kolmnurk olema võrdkülgne. Kuigi vastupidises suunas on väide tõesti ilmne (võrdkülgses kolmnurgas on mediaanid võrdsed), siis selliselt sõnastatuna pole see ilmselge ja vajas kindlasti põhjendamist.

6. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Läbi analüüsitud juht, kus poiste ja tüdrukute koguarv n pole suurem kui 2: 1 p
- Läbi analüüsitud juht, kus poiste või tüdrukute arv on 0: 1 p
- Läbi analüüsitud juht, kus poiste arv on 1 ja tüdrukute arv vähemalt 2 või vastupidi: 2 p
- Läbi analüüsitud juht, kus nii poiste kui ka tüdrukute arv on vähemalt 2: 2 p
- Pandud kirja vastus olenevalt n väärtusest: 1 p

Esines järgmisi tüüpilisi vigu.

- Sage viga oli see, et vastuseks anti lihtsalt 0, $n-1$ ja n ilma juhte n väärtuse järgi eraldamata. Selles ülesandes on n sisendparameeter ning vastus tuleb anda iga konkreetse n väärtuse jaoks. Ülaltoodud vastus ei ole õige, kui n on 1, 2 või 3. Näiteks kui $n = 2$, siis vastused $n-1$ ja n pole võimalikud. Mõnes töös oli konkreetne vastus hoopis andmata.
- Mitmes töös ei katnud vaadeldud variantide hulk loogiliselt kõigi võimalike variantide hulka.
- Mõnes lahenduses oli küll väidetud, et teatava laste arvu puhul on teatav vastus võimalik, aga polnud välja toodud, millise perekonnakoosseisu puhul see realiseerub. Seetõttu pole lõpuni selge, miks ikkagi selline vastus võimalik on.
- Mitmes töös esines keeleliselt ebakorrektset väljendit „n lapsi“, milles võib näha inglise või vene keele mõju.

Hindamisskeemid

1. *(Kaarel Hänni)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud a-osa: 2 p
- Lahendatud b-osa: 2 p
- Lahendatud c-osa: 3 p

Paljudes töödes esines mõtteid, mis aitasid lahendada iga alaosa. Selliste mõtete punktiväärtused on loetletud järgnevas tabelis.

Mõne ruutvõrrandi diskriminantide või lahendite väljakirjutamine ja nende arvu määramine sõltuvalt kordajatest	1 p
Viimase võrrandi kirjutamine funktsioonina teisest või tema vaatlemine ruutvõrrandina, nt kirjutatud viimasele funktsioonile lahendivalem	1 p
Kordajate b, c, p, q kaudu viimase funktsiooni lahendite väljakirjutamine	3 p

Nende hulgast sai punkte vaid ülimalt ühe (enim punkte väärt olnud ja töös esinenud) idee eest ning need punktid kaaluti läbi muidu täielikult lahendamata jäänud alaosade osakaaluga ülesandest. Teisi sõnu, kui põhiskeemi järgi võis töö saada s punkti ja lisatabeli järgi t punkti, siis kokku arvestati tööle $s + \left(1 - \frac{s}{7}\right) \cdot t$ punkti (ümardatuna lähima täisarvuni) – võttes mõnikord puuduste eest konkreetsete alaosade lahendustes sellest summast ka punkte maha.

Tüüpilised lahendused kas pakkusid lihtsalt näiteid või motiveersid pakkumisi diskriminantide väljakirjutamisest või kolmanda funktsiooni esimese kahe kombinatsioonina vaatlemisest tulenevate kaalutlustega. Tüüpviga oli väita, et kolmanda funktsiooni lahendite arv on täpselt või ülimalt n. Kui vaadelda kolmandat funktsiooni funktsioonina teisest funktsioonist, siis on sellel tõepoolest ülimalt n nullkohta, aga küsiti nullkohtade arvu funktsioonina x-st ja üks teise funktsiooni väärtus võib vastata mitmele x väärtusele. Kui näiteks esimese funktsiooni üks nullkoht on $x = 1$ ja teine funktsioon on $y = x^2$, siis annavad kolmanda funktsiooni nullkoha nii $x = 1$ kui ka $x = -1$, sest $1^2 = (-1)^2 = 1$.

2. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Rakendatud Pythagorase teoreemi antud kolmnurgas: 1 p
- Avaldatud $p^2 = (c+b)(c-b)$: 2 p
- Sellest kätte saadud $c+b$ ja $c-b$ väärtused: 3 p
- Õige vastus: 1 p

Ülesanne oli ootuspäraselt paljudel hästi lahendatud ning valdavalt saavutati kõrgeid punkte.

Pythagorase teoreemi pani valdav enamus lahendajaist kirja. Samas esines ka juhtumeid, kus kirjutati selle tavakuju ilma etteantud muutujat sisse asendamata. Kui mujal oli tingimust selgelt osundatud (nt reaga "$p = a$"), anti selle eest skeemi esimese rea järgi ikkagi punkt.

Oli juhtumeid, kus lahendaja jõudis tulemuseni $p^2 = c^2 - b^2$, aga ei tulnud parema poole tegurdamise peale. Sel puhul skeemi teise rea järgi punkte ei antud.

Üheks peamisteks komistuskividest kujunes Pythagorase teoreemi vaatlemine diofantilise võrrandina ning jäädi pidama üldtuntud täisarvuliste lahendite juurde. Mõnikord mõisteti teksti nii, et tuleb leida mõni konkreetne tingimustele vastav p ning sellele vastavad b ja c (sellisel juhul oli enamasti nimetatud $p = 3$, $b = 4$, $c = 5$); teinekord märgiti $b = 4p/3$ ja $c = 5p/3$ arvestamata tõigaga, et ühegi 3-st suurema p korral pole tegemist täisarvudega.

Levinud oli lahendus, kus eeldati, et $c - b = 1$ ja/või kasutati järjestikuste täisarvude ruutude vahesid. Ehkki sedasi leiti küll kõik lahendid, polnud sellise lahendustee puhul reeglina arutletud, kas need ka ainsad võimalikud lahendid on.

Palju esines lahendustes ka küljepikkuste paarsuse vaatlemist. Ehkki mitmed suutsid järeldada, et b on paaris ja c paaritu, ei suutnud ükski lahendaja selle varalt ülesannet lõpuni lahendada.

Mitmed lahendajad kaotasid punkte tegurite kõikvõimalike väärtuste tuletamise pealt. Enamasti jõuti võrranditeni $b + c = p^2$ ja $c - b = 1$, ent tihti polnud ammendatavalt põhjendatud, miks on tegemist ainsa võimalusega.

Väiksemat sorti näpuviga oli see, kui vahepeal asendati näiteks $p = 2n + 1$ ning pärast avaldati b ja c parameetri n kaudu. Kuna p on n kaudu üheselt leitav, anti selle eest õige vastuse punkt kätte.

3. *(Triinu Veeorg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Läbi vaadatud juht, kui leidub viie algarvu hulgas kolm arvu, mis kõik annavad 3-ga jagades erineva jäägi: 3 p
- Läbi vaadatud juht, kui leidub viie algarvu hulgas kolm arvu, mis kõik annavad 3-ga jagades sama jäägi: 3 p

- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Üheks tüüpveaks oli proovida ülesannet lahendada paarsuse abil. Hea mõte, kus alustada, aga kahjuks antud ülesande puhul tulemuseni ei viinud ja paraku paljud jäid sinna toppama. Teine tüüpviga oli uurida algarvude võimalike viimaseid numbreid ehk sisuliselt uurida jääke 10-ga jagamisel. Ka see lähenemine antud ülesande juures lahenduseni ei viinud.

4. *(Joonas Kalda)*

Lahenduse allpool toodud osade eest antud punktid summeeriti.

- Liikmed toodud ühele poole võrratust, murrud viidud ühisele nimetajale: 2 p
- Saadud murru lugeja lihtsustatud maksimaalselt: 1 p
- Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse abil või muul viisil järeldatud ülesande väide: 4 p

Paljudes töödes teisendati esialgne võrratus samaväärsele kujule, mis esineb žürii lahenduses 1. Enamasti ei tuldud aga selle peale, et uuele kujule rakendada aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust.

Mõned õpilased näitasid, et erijuhul $x = y = z$ kehtib võrdus ja proovisid sellest tuletada üldist juhtu. Selleks tõestati, et suurendades või vähendades ühte muutujat jääb võrratus kehtima. Nii selgub aga vaid, et võrratus kehtib kui muutujatest kaks on omavahel võrdsed, mis ei ole piisav.

5. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud teravnurkse kolmnurga mittesobivust: 1 p
- Põhjendatud ammendavalt, miks tipu A juures ei saa olla suurim nurk, sealhulgas ka juhul, kui A juures on nürinurk: 2 p
- Näidatud koos konstruktsiooniga, et tipu B juures saab olla suurim nurk: 2 p
- Näidatud koos konstruktsiooniga, et tipu C juures saab olla suurim nurk: 2 p

Kui töös ei olnud kirjeldatud, missugust juhtu vaadatakse, siis uuriti, missuguste juhtude puhul lahendus paika peab, ja anti punkte vastavalt.

6. *(Ago-Erik Riet)*

Järgmiste tähelepanekute eest punktid summeeriti.

- Toodud näide n^2+n+1 õpilasega klassist mõne (ühe või mitme) väikese n jaoks: 1 p
- Esitatud tõestamata väide, et klassis on $n^2 + n + 1$ õpilast: 1 p
- Edasised tähelepanekud, näiteks tõestatud väide, et rühmade võrdsest suurusest ja õpilaste ja rühmade arvude võrdsusest järeldub ülesande väide: 1 p

Maksimaalselt saadi selle ülesande lahendamisel 3 punkti 7 võimalikust. Kuskil ei esinenud ei korrektset tõestust, et rühmad on ühesuurused, ega tõestust, et ühe rühma suurus on võrdne rühmade arvuga, kuhu suvaline fikseeritud õpilane kuulub. Samuti ei esinenud ideed klassi õpilaste loendamiseks fikseeritud õpilase rühmade kaudu. Küll aga oli mõnes töös tõestatud väide nagu hindamisskeemi kolmandas punktis.

Tüüpiliselt sai lahenduse eest 0 punkti järgmistel juhtudel.

- Ülesande tekstist oli valesti aru saadud. Näiteks:
  - Tundides esineb õpilaste jaotus rühmadeks, kusjuures mõnikord võib leiduda kaks ühisosata rühma samas tunnis. See on vastuolus tingimusega, et iga kahe rühma jaoks leidub täpselt üks ühine õpilane.
  - Iga kahe õpilase kohta leidub kaheliikmeline rühm, mis sisaldab täpselt neid õpilasi.
  - Ülesande tekstist otse oli järeldatud kas see, et igas rühmas on vähemalt 3 õpilast või see, et kõik rühmad on sama suurusega.
- Oli tehtud tähelepanekuid õpilaste paaride arvu kohta rühmas või kokku, sellest midagi kasulikku järeldamata.
- Oli püütud järeldada, et rühmad on ühesuurused, aga tõestus oli puudulik.