Lahtine võistlus 2017 sügis

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Kaarel Hänni
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Ago-Erik Riet
Kati Smotrova
Laur Tooming

Matemaatika lahtine võistlus

30. september 2017 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Liugur Pauli meiliprogrammi kerimisribal näitab, kui suur osa kaustas olevatest kirjadest asub järjekorras enne kirja, mis on parajasti avatud. Paul pani tähele, et enne kirjade kustutamise algust asus liugur täpselt 10% kohal. Paul kustutas alates kirjast, mis oli avatud, mingi hulga järjestikuseid kirju nii, et liugur kerimisribal jõudis täpselt 50% peale. Mitu protsenti kaustas olevaist kirjadest Paul kustutas?

2. Leia kõik järjestikuste täisarvude kolmikud, kus üks kolmest arvust on ülejäänud kahe summa.

3. Mari kirjutab vihikusse 8 algarvu, mis on väiksemad kui 200 (algarvude seas võib olla korduvaid). Seejärel liidab ta esimesele algarvule 1, teisele 2, kolmandale 3 jne kuni viimasele 8, ning korrutab kõik saadud 8 summat. Leia suurim võimalik arvu 2 aste, millega leitud korrutis võib jaguda.

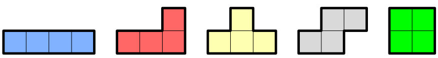
4. Mitu võimalust on asendada joonisel tähed numbritega nii, et tekiks korrektne tehe? Sama täht tuleb kõikjal asendada ühesuguste numbritega, erinevad tähed erinevate numbritega.

$$\begin{array}{cccccc} & & p & u & h & h \\ + & & m & e & z & i \\ \hline & d & i & n & e & e \end{array}$$

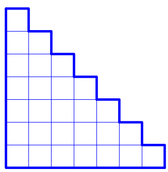
5. Olgu M kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt. Leia $|AD|$, kui on teada, et $|AB| = 2$ mm, $|BC| = 5$ mm, $|AM| = 4$ mm ja $\dfrac{|CD|}{|CM|} = 0{,}6$.

Märkus. Kõõlnelinurk on nelinurk, mille kõik tipud paiknevad ühel ringjoonel.

6. Joonisel on kujutatud viit sorti pusletükke.



Kati soovib neist kokku panna seitsmeastmelise „trepi“ (joonisel paremal; ruudud on kõigil joonistel ühesuurused). Igat sorti tükke on piiramatul hulgal ning neid võib pöörata ja peegeldada (ümber pöörata).



a) Millist sorti pusletükke peab Kati kindlasti kasutama?
b) Kas leidub pusletükk, mida ei saa kasutada?

Matemaatika lahtine võistlus

30. september 2017 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Kas koordinaattasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille iga tipu mõlemad koordinaadid on täisarvud?

2. Leia suurim positiivne täisarv, mis on 500-st väiksem ning mille korral ei leidu ühtki 500-st väiksemat positiivset täisarvu, millel oleks rohkem erinevaid algtegureid.

3. Ratsionaalarvude u ja v *mediandiks* nimetatakse arvu $x = \dfrac{a+c}{b+d}$, kus $\dfrac{a}{b}$ ja $\dfrac{c}{d}$ on vastavalt u ja v esitused taandumatu murruna.

Tõesta, et mistahes erinevate positiivsete ratsionaalarvude u ja x jaoks saab leida lõpmata palju positiivseid ratsionaalarve v, nii et x on u ja v mediant.

4. Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigil reaalarvudel ja annavad reaalarvulisi väärtusi ning mis suvaliste reaalarvude x ja y korral rahuldavad võrdust

$$\big(f(x+y)\big)^2 = xf(x) + 2f(xy) + \big(f(y)\big)^2 .$$

5. Kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti M peegeldused punktidest D, E ja F on vastavalt X, Y ja Z. Lõigud XZ ja YZ lõikavad külge AB vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et $|AL| = |BK|$.

6. Tasandil märgitakse lõplik arv punkte, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel. On teada, et leidub mittekumer hulknurk, mille kõik tipud asuvad märgitud punktides. Tõesta, et leidub mittekumer nelinurk, mille kõik tipud asuvad märgitud punktides.

Märkus. Hulknurka nimetatakse *kumeraks*, kui tema kõigi sisenurkade suurused on alla $180°$.

Открытое соревнование по математике

30 сентября 2017 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Бегунок на полосе прокрутки почтовой программы Паши показывает, какая часть писем в папке находится по очерёдности раньше открытого сейчас письма. Паша заметил, что до начала стирания писем бегунок находился точно на уровне 10%. Паша стёр, начиная с письма, которое было открыто, некоторое количество последовательных писем. После этого бегунок оказался ровно на уровне 50%. Сколько процентов находящихся в папке писем стёр Паша?

2. Найти все тройки последовательных целых чисел, в которых одно из трёх чисел является суммой двух оставшихся.

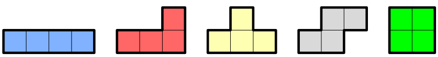
3. Маша записывает в тетради 8 простых чисел, меньших чем 200 (среди простых чисел могут быть повторяющиеся). Далее к первому простому числу она прибавляет 1, ко второму 2, к третьему 3 и т. д. пока не прибавит к последнему 8, затем перемножает все полученные 8 сумм. Найти наибольшую степень числа 2, на которую может делится полученное произведение.

4. Сколькими способами можно на рисунке заменить буквы цифрами так, чтобы получилось корректное действие? Одну и ту же букву нужно заменять на ту же цифру, разные буквы на разные цифры.

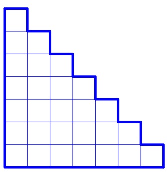
$$\begin{array}{r} p\;u\;h\;h \\ +\;\underline{m\;e\;\textit{г}\;i} \\ d\;i\;n\;e\;e \end{array}$$

5. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Найти $|AD|$, если известно, что $|AB| = 2$ мм, $|BC| = 5$ мм, $|AM| = 4$ мм и $\dfrac{|CD|}{|CM|} = 0{,}6$.

6. На рисунке есть пять видов кусочков мозаики.



Катя желает составить из них семиступенчатую “лестницу” (на рисунке справа; клетки на всех рисунках одинакового размера). Кусочков каждого вида неограниченное количество, их можно поворачивать и зеркально отражать (переворачивать).



а) Кусочки каких видов Кате обязательно придётся использовать?

б) Есть ли кусочек, который нельзя использовать?

Открытое соревнование по математике

30 сентября 2017 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найдётся ли на координатной плоскости равносторонний треугольник, обе координаты каждой вершины которого целые числа?

2. Найти наибольшее целое положительное число меньше чем 500, для которого не найдётся ни одного целого положительного числа меньше чем 500, имеющего больше различных простых делителей.

3. *Медианта* рациональных чисел u и v – это число $x = \dfrac{a+c}{b+d}$, где $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ являются соответственно представлениями чисел u и v в виде несократимых дробей.

Доказать, что для любых различных положительных рациональных чисел u и x можно найти бесконечно много положительных рациональных чисел v таких, что x будет медиантой u и v.

4. Найти все функции f, определённые на всех действительных числах и принимающие действительные значения, для которых при всех действительных x и y выполняется равенство

$$\big(f(x+y)\big)^2 = xf(x) + 2f(xy) + \big(f(y)\big)^2 .$$

5. В треугольнике ABC обозначим центры сторон BC, CA и AB через соответственно D, E и F. Точка пересечения медиан M треугольника ABC отражается относительно точек D, E и F соответственно в точки X, Y и Z. Отрезки XZ и YZ пересекают сторону AB соответственно в точках K и L. Доказать, что $|AL| = |BK|$.

6. На плоскости отмечается конечное количество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что существует невыпуклый многоугольник, все вершины которого лежат в отмеченных точках. Доказать, что существует невыпуклый четырёхугольник, все вершины которого лежат в отмеченных точках.

Примечание. Многоугольник называется *выпуклым*, если величины всех его внутренних углов меньше 180°.

Lahendused

1. *Vastus:* 80.

Olgu kaustas enne kustutamist n kirja. Et liugur näitas 10%, oli $0{,}1n$ kirja kaustas eespool seda kirja, millest Paul kustutamist alustas. Pärast kustutamise lõppu moodustasid need 50% kõigist kausta alles jäänud kirjadest, mis tähendab, et kausta jäi $0{,}2n$ kirja. Järelikult kustutas Paul $0{,}8n$ kirja, mis moodustab algul kaustas olnud n kirjast 80%.

2. *Vastus:* $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 1)$, $(-3, -2, -1)$.

Lahendus 1. Olgu nõutud järjestikused täisarvud x, $x+1$ ja $x+2$. Vaatame läbi kolm juhtu vastavalt sellele, milline neist täisarvudest on ülejäänute summa.

- Juhul $x+2 = x+(x+1)$ saame $x = 1$. Siit tekib kolmik $(1, 2, 3)$.
- Juhul $x+1 = x+(x+2)$ saame $x = -1$. Tekib kolmik $(-1, 0, 1)$.
- Juhul $x = (x+1)+(x+2)$ saame $x = -3$. Tekib kolmik $(-3, -2, -1)$.

Lahendus 2. Kui kõik kolm arvu on positiivsed, siis saab vaid suurim neist olla ülejäänud kahe summa. Et üks liidetav on summast 1 võrra väiksem, peab teine liidetav olema 1. Siit tuleneb ainsa võimalusena kolmik $(1, 2, 3)$.

Kui kõik kolm arvu on negatiivsed, siis saab vaid vähim neist olla ülejäänud kahe summa. Et üks liidetav on summast 1 võrra suurem, peab teine liidetav olema -1. Siit tuleneb ainsa võimalusena kolmik $(-3, -2, -1)$.

Kui arvud pole kõik positiivsed ega kõik negatiivsed, siis peab nende seas olema 0. Arv 0 ei saa olla liidetav, muidu oleks summa võrdne teise liidetavaga. Seega peab 0 olema ülejäänud kahe arvu summa. Need kaks arvu saavad olla vaid -1 ja 1. Siit tuleneb viimane kolmik $(-1, 0, 1)$.

Lahendus 3. Olgu kolmest järjestikusest täisarvust üks ülejäänud kahe summa. Siis üks liidetav peab summast kas 1 võrra suurem või 1 võrra väiksem olema. Teine liidetav võrdub summa ja esimese liidetava vahega ning on järelikult kas 1 või -1. Seejuures pole see liidetav komplektis keskmine (muidu poleks ülejäänud kahe arvu vahe 1 või -1). Seega tuleb uurida vaid järjestikuste täisarvude kolmikuid, milles vähim või suurim arv on kas 1 või -1. Sellised kolmikud on $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 1)$ ja $(-3, -2, -1)$. Kõik need ka sobivad, sest $1+2 = 3$, $-1+1 = 0$ ja $-2+(-1) = -3$.

3. *Vastus:* 2^{31}.

Võimalikult suure 2 astmega jaguva korrutise saamiseks peab iga tegur jaguma võimalikult suure 2 astmega. Algarvule paarisarvu 2, 4, 6 või 8 liitmisel jagub summa 2-ga ainult siis, kui see algarv ise jagub 2-ga. Et ainus paaris algarv on 2, tuleb paariskohtadele valida algarv 2. Paariskohtade algarvudest saadavad summad 4, 6, 8 ja 10 annavad korrutisse astmed 2^2, 2^1, 2^3 ja 2^1. Paaritu järjekorranumbriga algarve vaatleme ühekaupa.

- Et 127 on algarv ja $127 + 1$ ehk 2^7 on suurim 2 aste, mis on väiksem arvust $200 + 1$, sobib kohale 1 valida 127.
- Et $125 = 5^3$, siis 200-st väiksemale algarvule 3 liitmisel ei ole võimalik saada summat, mis jaguks arvuga 2^7. Et aga 61 on algarv ja $61+3 = 2^6$, sobib kohale 3 valida 61.
- Et $123 = 3 \cdot 41$, siis 200-st väiksemale algarvule 5 liitmisel ei ole võimalik saada summat, mis jaguks arvuga 2^7. Et aga 59 on algarv ja $59 + 5 = 2^6$, sobib kohale 5 valida 59.
- Et $121 = 11^2$, siis 200-st väiksemale algarvule 7 liitmisel pole võimalik saada summat, mis jaguks arvuga 2^7. Arvuga 2^6 jaguvad naturaalarvud, mida võib saada 7 liitmisel 200-st väiksemale arvule, on veel 64 ja 192, kuid kuna $57 = 3 \cdot 19$ ja $185 = 5 \cdot 37$, ei ole ka sel puhul esimene liidetav algarv. Et 89 on algarv ja $89 + 7 = 3 \cdot 2^5$, sobib kohale 7 valida 89.

Kokkuvõttes saab korrutis jaguda maksimaalselt astmega $2^{7+2+6+1+6+3+5+1}$ ehk 2^{31}.

Märkus. Leitud algarvude komplekt on ainus, mis ülesande tingimusi rahuldab, sest $189 = 3 \cdot 61$, $187 = 11 \cdot 17$, $25 = 5^2$ ja $153 = 3^2 \cdot 17$, mistõttu kohal 3 ei saa kasutada arvu 189, kohal 5 arvu 187 ega kohal 7 arve 25 ja 153, mis võiksid anda sama 2 astmega jaguvad tegurid.

4. *Vastus:* 12.

Kui ühelistest ei tekiks ülekannet kümnelistesse, peaks üheliste järgi kehtima seos $h + i = e$ ja kümneliste järgi $h + z = e$ või $h + z = 10 + e$, millest saaksime vastavalt $i = z$ või $i + 10 = z$. Kumbki variant ei ole võimalik. Seega ühelistest peab tekkima ülekanne kümnelistesse. Järelikult $h + i = 10 + e$ ning kümneliste järgi $h + z + 1 = e$ või $h + z + 1 = 10 + e$. Esimene variant ei sobi, sest annaks $z + 11 = i$. Seega peab kehtima teine variant, mispuhul ka kümnelistest tekib ülekanne sajalistesse ning $z + 1 = i$. Ilmselt tekib ülekanne ka tuhandelistest kümnetuhandelistesse ning $d = 1$.

Kümneliste järgi saame $h \neq 9$, muidu $z = e$ ülekande tõttu ühelistest. Sarnaselt $u \neq 9$, muidu sajalistes $e = n$ ülekande tõttu kümnelistest. Kui sajalistest tekib ülekanne tuhandelistesse, siis võrduste $p + m + 1 = 10 + i$,

$h + i = 10 + e$ ja $u + e + 1 = 10 + n$ liitmisel ja saame pärast lihtsustamist $p + m + h + u = 28 + n$. See on võimalik vaid juhul, kui vasakul pool esineb liidetavana number 9, sest $8 + 7 + 6 + 5 = 26 < 28 + n$. Seega $p = 9$ või $m = 9$. Kui sajalistest ei teki ülekannet tuhandelistesse, saame võrduste $p + m = 10 + i$ ja $h + i = 10 + e$ liitmisel pärast lihtsustamist $p + m + h = 20 + e$. Juhul $e \geqslant 2$ peab vasakus pooles esinema liidetavana number 9, sest $8 + 7 + 6 = 21 < 20 + e$. Juht $e = 1$ pole võimalik $d = 1$ tõttu. Kui juhul $e = 0$ ei esineks summas $p + m + h$ liidetavat 9, peaksid p, m ja h olema 8, 7 ja 5 mingis järjestuses, et tekiks summa 20. Kuid u ja n on siis sajaliste järgi järjestikused numbrid ning ka z ja i on eelneva põhjal järjestikused numbrid. Järelejäänud numbrite 2, 3, 4, 6, 9 seas aga kahte järjestikuste numbrite paari pole. Vastuolu näitab, et ka sel juhul on summa $p + m + h$ liidetavate seas 9, st $p = 9$ või $m = 9$.

Et p ja m vahetamine ei muuda tehte korrektsust, võime üldisust kitsendamata eeldada, et $p = 9$. Kui sajalistest tuhandelistesse toimuks ülekanne, saaksime tuhandelistes $m = i$. Seega sajalistest tuhandelistesse ülekannet ei teki ning $i + 1 = m$ ehk z, i ja m on kolm järjestikust numbrit. Ülekande tõttu ühelistest kümnelistesse peab kehtima $h > e$ ja $i > e$, mistõttu ka $z > e$ ja $m > e$. Lisaks teame, et $p = 9 > e$. Sajaliste järgi ka $n > e$. Kuna 6 numbrit on suuremad kui e, siis $e \leqslant 3$. Et $e \neq 1$, jääb uurida kolme juhtu.

- Kui $e = 3$, siis sajaliste järgi $u + 4 = n$. Kolme järjestikuse numbri z, i, m valikuks on 3 võimalust (4, 5, 6 või 5, 6, 7 või 6, 7, 8). Neist sobib ainult $(z, i, m) = (4, 5, 6)$, mispuhul $h = 8$, sest ülejäänud juhtudel $h = m$ või $h = z$. Kuid järelejäänud numbrite 0, 2, 7 seast ei saa valida numbreid u ja n nii, et $u + 4 = n$.

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 0 & 7 & 7 \\ + & & 6 & 2 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

Joonis 1

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 0 & 5 & 5 \\ + & & 8 & 2 & 6 & 7 \\ \hline & 1 & 7 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

Joonis 2

- Kui $e = 2$, siis sajaliste järgi $u + 3 = n$. Kui nüüd $(z, i, m) = (3, 4, 5)$, siis $h = 8$, kuid järelejäänud numbrite 0, 6, 7 seas puudub võimalus sobivalt valida u ja n. Kui $(z, i, m) = (4, 5, 6)$, siis $h = 7$ ja ainsa võimalusena saame $(u, n) = (0, 3)$ (joonis 1). Juht $(z, i, m) = (5, 6, 7)$ annaks

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 5 & 7 & 7 \\ + & & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

Joonis 3

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 7 & 6 & 6 \\ + & & 5 & 0 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

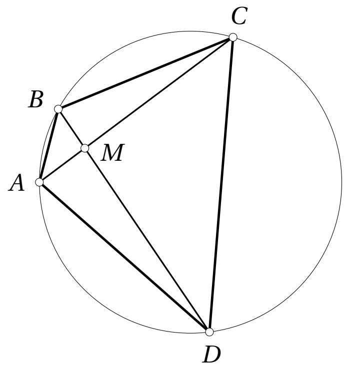
Joonis 4

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 2 & 4 & 4 \\ + & & 7 & 0 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Joonis 5

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & 4 & 3 & 3 \\ + & & 8 & 0 & 6 & 7 \\ \hline & 1 & 7 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Joonis 6



Joonis 7

$h = i$. Viimaks kui $(z, i, m) = (6, 7, 8)$, siis $h = 5$ ja jällegi ainsa võimalusena saame $(u, n) = (0, 3)$ (joonis 2).

- Kui $e = 0$, siis sajaliste järgi $u + 1 = n$. Edasi kui $(z, i, m) = (2, 3, 4)$, siis $h = 7$ ja ainsa võimalusena saame $(u, n) = (5, 6)$ (joonis 3). Kui $(z, i, m) = (3, 4, 5)$, siis $h = 6$ ja ainsa võimalusena $(u, n) = (7, 8)$ (joonis 4). Juht $(z, i, m) = (4, 5, 6)$ annaks $h = i$. Kui $(z, i, m) = (5, 6, 7)$, siis $h = 4$ ja ainsa võimalusena $(u, n) = (2, 3)$ (joonis 5). Kui aga $(z, i, m) = (6, 7, 8)$, siis $h = 3$ ja ainsa võimalusena $(u, n) = (4, 5)$ (joonis 6).

Saadud 6 lahendis p ja m vahetamisel tekib veel 6 lahendit.

5. *Vastus:* 6 mm.

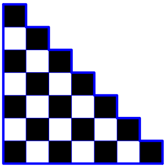
Tippnurgad AMB ja DMC on võrdsed. Märkame, et kehtivad ka võrdused $\angle ABM = \angle ABD = \angle ACD = \angle MCD$, sest ABD ja ACD on samale kaarele toetuvad piirdenurgad. Seega kolmnurgad AMB ja DMC on tunnuse NN järgi sarnased. Seetõttu $\frac{|BA|}{|BM|} = \frac{|CD|}{|CM|}$, kust $|BM| = |BA| \cdot \frac{|CM|}{|CD|}$.

Sarnaselt eelnevaga on võrdsed ka tippnurgad AMD ja BMC ning piirdenurkade omadusest tuleneb $\angle ADM = \angle ADB = \angle ACB = \angle MCB$. Järelikult ka kolmnurgad AMD ja BMC on tunnuse NN järgi sarnased ning $\frac{|AD|}{|AM|} = \frac{|BC|}{|BM|}$. Kokkuvõttes

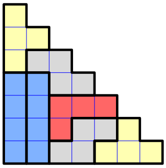
$$|AD| = \frac{|AM| \cdot |BC|}{|BM|} = \frac{|AM| \cdot |BC|}{|BA|} \cdot \frac{|CD|}{|CM|} = \frac{4\text{ mm} \cdot 5\text{ mm}}{2\text{ mm}} \cdot 0{,}6 = 6\text{ mm}.$$

6. *Vastus:* a) keskmist; b) ei.

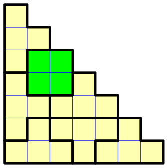
Värvime trepi ruudud malekorras mustaks ja valgeks. Üldisust kitsendamata olgu nurgaruut must – siis musti ruute on 16 ja valgeid 12 (joonis 8).



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

Iga pusletükk peale selle, mis on ülesande joonisel keskmine, katab musti ja valgeid ruute võrdsel arvul. Seega peab erineva arvu mustade ja valgete ruutude katmiseks keskmist tükki kindlasti kasutama.

Joonistel 9 ja 10 on toodud kaks paigutust, mis näitavad, et ülejäänud nelja pusletükkide sorti saab ka mitte kasutada ja tükke, mida kasutada ei saaks, ei ole.

Lahendused

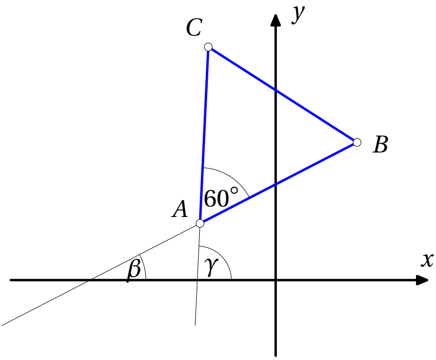
1. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, kus $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ ning $x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C$ on täisarvud. Üldisust kitsendamata eeldame, et arvud x_A, x_B, x_C on erinevad ehk ükski kolmnurga ABC külg pole y-telje sihiline (vastasel korral pöörame koordinaattasandit ümber koordinaatide alguspunkti 90° võrra). Olgu sirgete AB ja AC tõusunurgad vastavalt β ja γ (joonis 11); üldisust kitsendamata $\gamma > \beta$. Konstruktsiooni põhjal $\tan(\gamma - \beta) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Teisalt aga

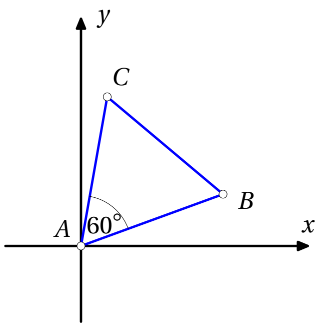
$$\tan(\gamma - \beta) = \frac{\tan\gamma - \tan\beta}{1 + \tan\gamma \tan\beta}.$$

Et $\tan\beta = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ja $\tan\gamma = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, siis $\tan(\gamma - \beta)$ peab olema ratsionaalarv. Arv $\sqrt{3}$ aga pole ratsionaalarv. Vastuolu näitab, et võrdkülgse kolmnurga tipud ei saa olla kõik täisarvuliste koordinaatidega.

Lahendus 2. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Üldisust kitsendamata $A(0, 0)$ (joonis 12). Siis tippude B ja C kohavektorite skalaarkorrutis on täisarv, sest skalaarkorrutis avaldub vastavate koordinaatide korrutiste summana. Teisalt avaldub see skalaarkorrutis kujul $l^2 \cos 60^\circ$ ehk $\dfrac{l^2}{2}$, kus l on vaadeldava võrdkülgse kolmnurga



Joonis 11



Joonis 12

küljepikkus. Siit nähtub, et küljepikkus l on paarisarv. Olgu $B(x,y)$; siis $l^2 = |AB|^2 = x^2 + y^2$. Et l on paarisarv, siis $x^2 + y^2$ jagub 4-ga, mis on võimalik ainult tingimusel, et x ja y on mõlemad paaris. Analoogselt on ka tipu C mõlemad koordinaadid paarisarvud. Homoteetia keskpunkti A suhtes teguriga $\frac{1}{2}$ viib antud võrdkülgse kolmnurga kaks korda väiksema küljepikkusega võrdkülgseks kolmnurgaks, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega. Samamoodi jätkates võime muuta täisarvuliste koordinaatidega tippudega võrdkülgse kolmnurga küljepikkuse kuitahes pisikeseks, mis ilmselt pole võimalik. Seega võrdkülgset kolmnurka, mille kõigi tippude koordinaadid on täisarvud, ei leidu.

Lahendus 3. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Eeldame üldisust kitsendamata, et $A(0;0)$. Olgu α nurk x-telje ja vektori $\overrightarrow{AB}$ vahel (joonis 13) ning l kolmnurga küljepikkus. Siis $B(x_B; y_B)$ ja $C(x_C; y_C)$, kus

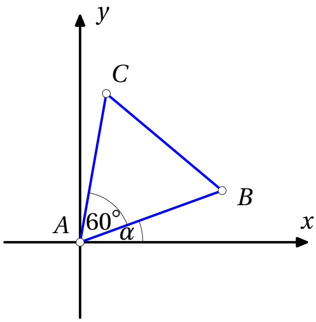
$$\begin{aligned} x_B &= l\cos\alpha, & x_C &= l\cos(\alpha + 60^\circ), \\ y_B &= l\sin\alpha, & y_C &= l\sin(\alpha + 60^\circ). \end{aligned}$$

Sulgude avamisel saame

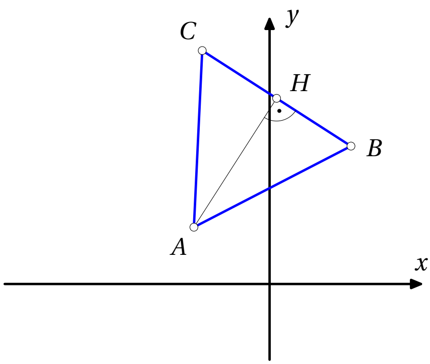
$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2} l\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} l\sin\alpha = \frac{1}{2} x_B - \frac{\sqrt{3}}{2} y_B, \\ y_C &= \frac{1}{2} l\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} l\cos\alpha = \frac{1}{2} y_B + \frac{\sqrt{3}}{2} x_B. \end{aligned}$$

Kuna nii x_B kui y_B on mõlemad täisarvud ning ei saa olla korraga nullid, siis vähemalt üks arvudest x_C ja y_C on irratsionaalarv, mis annab vastuolu.

Lahendus 4. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Eeldame üldisust kitsendmata, et $A(0;0)$. Kui l on kolmnurga



Joonis 13



Joonis 14

küljepikkus ning $B(x_B; y_B)$ ja $C(x_C; y_C)$, siis

$$l^2 = x_B^2 + y_B^2 = x_C^2 + y_C^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2.$$

Teisendades saame

$$x_B^2 + y_B^2 = x_C^2 + y_C^2 = 2(x_B x_C + y_B y_C).$$

Paneme tähele, et võrduse paremal pool on paarisarv, mistõttu on x_B ja y_B ühe ja sama paarsusega, samuti on x_C ja y_C ühe ja sama paarsusega. Sellest omakorda järeldub, et $x_B x_C + y_B y_C$ on alati paarisarv, mistõttu jagub iga liige võrduste ahelas 4-ga. Kuna paaritu arvu ruut annab 4-ga jagades alati jäägi 1, siis pole võimalik, et arvude x_B, y_B, x_C, y_C hulgas oleks paaritu arv. Järelikult võime kirjutada $x_B = 2x'_B$, $y_B = 2y'_B$, $x_C = 2x'_C$, $y_C = 2y'_C$. Asendades sisse ning jagades 4-ga läbi, saame

$$\left(x'_B\right)^2 + \left(y'_B\right)^2 = \left(x'_C\right)^2 + \left(y'_C\right)^2 = 2(x'_B x'_C + y'_B y'_C).$$

Tegemist on sama võrrandiga nagu enne, nii et analoogselt eelnevaga on x'_B, y'_B, x'_C, y'_C kõik paarisarvud. Seda protsessi saab jätkata lõpmatuseni, ent kuna x_B, y_B, x_C, y_C on lõplikud arvud, mis pole kõik korraga nullid, pole see võimalik.

Lahendus 5. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, mille tippude koordinaadid on täisarvud. Olgu H külje BC keskpunkt (joonis 14). Paneme tähele, et $H\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ on ratsionaalarvuliste koordinaatidega, mistõttu nii vektori $\overrightarrow{AH}$ kui vektori $\overrightarrow{BH}$ koordinaadid on ratsionaalarvulised, olgu need vastavalt (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Paneme tähele, et ühelt poolt on vektori $\overrightarrow{AH}$ pikkus $\sqrt{3}$ korda suurem vektori $\overrightarrow{BH}$ pikkusest, teiselt poolt on nende vaheline nurk suurusega 90°. Seetõttu saame kirjutada

$$(x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-y_1, x_1).$$

Kuna x_1 ja y_1 ei ole korraga nullid, ei ole vähemalt üks arvudest x_2 ja y_2 ratsionaalarv, mis annab vastuolu.

2. *Vastus:* 462.

Lahendus 1. Et 5 vähima algarvu korrutis $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ on suurem kui 500, on kõigil 500-st väiksematel positiivsetel täisarvudel ülimalt 4 erinevat algtegurit. Kuna $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 < 500$, on 4 erineva algteguriga 500-st väiksemad positiivsed täisarvud olemas. Järelikult tuleb vastuseks leida suurim 4 erineva algteguriga positiivne 500-st väiksem täisarv.

Otsitava arvu algtegurite hulka peab kuuluma 2, muidu peaks otsitav arv olema vähemalt $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ehk 1155 ega saaks olla 500-st väiksem. Samuti peab otsitava arvu algtegurite hulka kuuluma 3, muidu peaks otsitav arv olema vähemalt $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ehk 770 ega saaks olla 500-st väiksem. Kokkuvõttes peab otsitav arv jaguma 6-ga. Et $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 858 > 500$, peab kas 5 või 7 kuuluma otsitava arvu algtegurite hulka. Seega peab otsitav arv jaguma 30-ga või 42-ga. Suurimad sellised 500-st väiksemad arvud on 480 ehk $2^5 \cdot 3 \cdot 5$ ja 462 ehk $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Neist ainult teisel on 4 erinevat algtegurit.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et kõigil 500-st väiksematel positiivsetel täisarvudel on ülimalt 4 algtegurit. Kuna $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462 < 500$, on 4 erineva algteguriga 500-st väiksemad positiivsed täisarvud olemas. Proovimise teel leiame, et arvudel 463 kuni 499 on ülimalt 3 erinevat algtegurit. Seega 462 ongi otsitav.

3. Olgu $u = \dfrac{a}{b}$ ja $x = \dfrac{c}{d}$ esitused taandumatu murruna. Otsime arvu v kujul $v = \dfrac{mc - a}{md - b}$, kus m on piisavalt suur täisarv, et $mc - a$ ja $md - b$ oleksid mõlemad positiivsed. Definitsiooni kohaselt on x arvude u ja v mediant niipea, kui murd $\dfrac{mc - a}{md - b}$ on taandumatu. Näitame, et naturaalarve m, mille korral murd $\dfrac{mc - a}{md - b}$ on taandumatu, on lõpmata palju; sellega on ülesanne lahendatud, sest siis on lõpmatult ka piisavalt suuri naturaalarve m, et $mc - a$ ja $md - b$ oleksid positiivsed.

Tõestame eelnevalt abitulemuse, mille kohaselt algarvud, millega vaadeldaval kujul murrud on taandatavad, on arvu $ad - bc$ tegurid. Kasutame standardset kirjaviisi $s \mid t$ tähistamaks, et arv s on arvu t tegur. Tõepoolest, kui $p \mid mc - a$ ja $p \mid md - b$, siis $p \mid a(md - b) - b(mc - a) = m(ad - bc)$, mistõttu $p \mid m$ või $p \mid ad - bc$. Kui $p \mid m$, siis $p \mid a$ ja $p \mid b$, mis on vastuolus murru $\dfrac{a}{b}$ taandumatusega. Seega $p \mid ad - bc$.

Kuna u ja x on eelduse kohaselt erinevad, siis $ad - bc \neq 0$, mistõttu leidub arvul $ad - bc$ vaid lõplik hulk algtegureid. Olgu $p_1, \ldots, p_l$ kõik erinevad algarvud, millega murd $\dfrac{mc - a}{md - b}$ kasvõi ühe kordaja m korral on taandatav, ning iga $i = 1, \ldots, l$ korral olgu m_i mingi selline naturaalarv, et murd $\dfrac{m_i c - a}{m_i d - b}$ on taandatav algarvuga p_i.

Olgu nüüd n suvaline kordaja, mille korral murd $\dfrac{nc - a}{nd - b}$ pole taandumatu. See murd peab olema taandatav mingi algarvuga p_i, millega on aga taandatav ka murd $\dfrac{m_i c - a}{m_i d - b}$. Siis $p_i \mid (n - m_i)c$ ja $p_i \mid (n - m_i)d$. Seega $p_i \mid n - m_i$, sest vastasel korral $p \mid c$ ja $p \mid d$, mis on vastuolus murru $\dfrac{c}{d}$ taandumatusega. Seega $n \equiv m_i \pmod{p_i}$ (st n ja m_i annavad p_i-ga jagades sama jäägi).

Järelikult valides n nii, et iga $i = 1, \dots, l$ korral $n \equiv m_i + 1 \pmod{p_i}$, peab murd $\dfrac{nc - a}{nd - b}$ olema taandumatu. Hiina jäägiteoreemi põhjal aga leidub sellist kongruentsisüsteemi rahuldavaid naturaalarve n lõpmata palju.

4. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = x$.

Asendades antud võrrandisse $x = y = 0$, saame $\big(f(0)\big)^2 = 0 + 2f(0) + \big(f(0)\big)^2$, mida lihtsustades leiame $f(0) = 0$.

Asendades antud võrrandisse $y = 0$, saame iga reaalarvu x jaoks võrduse $(f(x))^2 = xf(x) + 2f(0) + (f(0))^2$. Arvestades, et $f(0) = 0$, lihtsustub see võrdus edasi kujule

$$f(x)\big(f(x) - x\big) = 0.$$

Järelikult kehtib iga x korral kas $f(x) = 0$ või $f(x) = x$.

Oletame, et leidub reaalarv $c \neq 0$, mille puhul $f(c) = 0$. Asendades algsesse seosesse $x = c$, saame pärast lihtsustamist $\big(f(c + y)\big)^2 = 2f(cy) + \big(f(y)\big)^2$, kust omakorda

$$2f(cy) = \big(f(c + y)\big)^2 - \big(f(y)\big)^2. \tag{1}$$

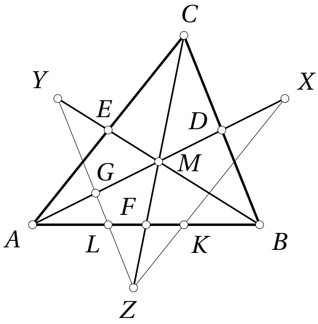
See kehtib suvalise y korral. Vaatame läbi neli juhtu vastavalt sellele, kas $f(c + y) = 0$ või $f(c + y) = c + y$ ja kas $f(y) = 0$ või $f(y) = y$.

- Kui $f(c + y) = 0$ ja $f(y) = 0$, siis seos (1) lihtsustub kujule $f(cy) = 0$.
- Kui $f(c + y) = 0$ ja $f(y) = y$, siis seos (1) annab $f(cy) = -\dfrac{y^2}{2}$. Oletades, et $f(cy) = cy \neq 0$, saame taandamisel $c = -\dfrac{y}{2}$ ehk $y = -2c$.
- Kui $f(c+y) = c+y$ ja $f(y) = 0$, siis seos (1) annab $2f(cy) = (c+y)^2$. Oletades, et $f(cy) = cy$, saame sarnaste liikmete koondamisel $c^2 + y^2 = 0$, kust $c = 0$, vastuolu.
- Kui $f(c + y) = c + y$ ja $f(y) = y$, siis seos (1) annab $2f(cy) = c^2 + 2cy$. Oletades, et $f(cy) = cy$, saame $c^2 = 0$, vastuolu.

Kokkuvõttes saame, et $f(cy) \neq 0$ saab kehtida ainult juhul, kui $y = -2c$. Teisi sõnu, $f(x) \neq 0$ saab kehtida vaid siis, kui $x = c \cdot (-2c) = -2c^2$. Seega on võimalik valida reaalarv d nii, et $d \neq 0$, $f(d) = 0$ ja $|d| \neq |c|$. Võttes eelnevas arutelus c rolli d, jõuame järeldusele, et $f(x) \neq 0$ saab kehtida vaid juhul $x = -2d^2$. Kuna $-2d^2 \neq -2c^2$, siis $f(x) \neq 0$ ei saa kehtida ühegi $x \neq 0$ korral ehk $f(x) = 0$ iga x korral.

Kokkuvõttes sobivad ainult kaks funktsiooni $f(x) = 0$ ja $f(x) = x$.

5. *Lahendus 1.* Et $\dfrac{|MY|}{|MB|} = \dfrac{2|ME|}{2|ME|} = 1$ ja analoogselt $\dfrac{|MZ|}{|MC|} = 1$, siis kiirteteoreemi põhjal $BC \parallel YZ$. Olgu sirgete YZ ja AD lõikepunkt G (joonis 15). Siis kiirteteoreemi põhjal $\dfrac{|MG|}{|MD|} = \dfrac{|MY|}{|MB|} = 1$, kust $|MG| = |MD| = \dfrac{1}{3}|AD|$



Joonis 15

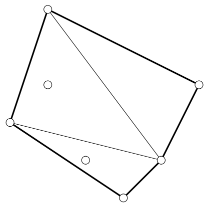
ja $|AG| = |AD| - |MD| - |MG| = \dfrac{1}{3}|AD|$. Edasi saame kiirteteoreemist $\dfrac{|AL|}{|AB|} = \dfrac{|AG|}{|AD|} = \dfrac{1}{3}$. Vahetades omavahel A ja B rollid, D ja E rollid, X ja Y rollid ning K ja L rollid, saame analoogselt $\dfrac{|BK|}{|AB|} = \dfrac{1}{3}$. Kokkuvõttes $|AL| = |BK|$.

Lahendus 2. Et $|MB| = 2|ME| = |MY|$ ja analoogselt $|MC| = |MZ|$ ning tippnurkadest $\angle BMC = \angle YMZ$, on kolmnurgad BMC ja YMZ sarnased teguriga 1 ehk kongruentsed. Kuna kolmnurga BMC küljed BM ja CM on samasihilised kolmnurga YMZ vastavate külgedega YM ja ZM, on ka kolmandad küljed BC ja YZ samasihilised. Analoogselt leiame, et AC ja XZ on omavahel samasihilised. Seega kolmnurga KLZ küljed on samasihilised kolmnurga ABC külgedega.

Olgu kolmnurga KLZ tipust Z tõmmatud mediaan ZF'. Samasihiliste külgedega kolmnurkade vastavatest tippudest tõmmatud mediaanid on samasihilised, mistõttu sirged ZF' ja CF on samasihilised. Et samasihiline on ka ZF, siis $F = F'$. Seega ZF on kolmnurga KLZ mediaan, kust $|FK| = |FL|$. Sellest tulenevalt $|AL| = |AF| - |FL| = |BF| - |FK| = |BK|$.

Märkus. Lahenduse 2 saab kiirteteoreemi asemel lühemalt kirja panna homoteetsete teisenduste terminites: homoteetia teguriga -1 keskpunktiga M viib kolmnurga ABC kolmnurgaks XYZ ning see teisendus ilmselt säilitab kolmnurga mediaanide sihid, mistõttu lõikude KL ja XY paralleelsusest järeldub $|KF| = |LF|$.

6. *Lahendus 1.* Vaatleme märgitud punktide hulga kumerkatet. Peab leiduma märgitud punkt, mis ei kuulu kumerkatte tippude hulka, sest kui kõik märgitud punktid oleksid kumerkattel, oleksid kõik hulknurgad tippudega märgitud punktides kumerad. Kumerkattele mitte kuuluv märgitud punkt asub kumerkatte sisepiirkonnas. Jaotame kumerkatte kolmnurkadeks, tõmmates

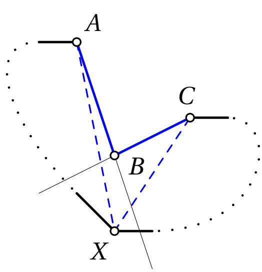


Joonis 16

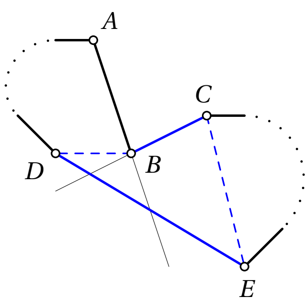
vajaliku arvu diagonaale. Et ükski kolm märgitud punkti ei asu ühel sirgel, peab kumerkattele mitte kuuluv punkt jääma tükelduses mingi kolmnurga sisse. Selle kolmnurga tipud koos tema sees oleva märgitud punktiga asuvadki mittekumera nelinurga tippudes.

Märkus. Tasandi punktihulga *kumerkatteks* nimetatakse vähimat sellist kumerat kujundit, et kõik vaadeldava hulga punktid jäävad selle kujundi sisepiirkonda või rajale. Lõpliku punktihulga kumerkate on ilmselt kumer hulknurk. Selle konstrueerimist võib ette kujutada järgnevalt. Valime sirge, millest kõik vaadeldavad punktid jäävad ühele poole. Nihutame sirget kuni lähima vaadeldava punktini A_1. Edasi pöörame sirget ümber punkti A_1, kuni ta läbib veel mõnda vaadeldava hulga punkti A_2. Jätkame sirge pööramist ümber punkti A_2 endises suunas, kuni ta läbib järgmist vaadeldava hulga punkti A_3 jne, kuni lõpuks, pärast pööramist ümber mingi A_k, läbib sirge jälle punkti A_1. Hulknurk $A_1A_2A_3 \dots A_k$, mille tippudeks on kirjeldatud protsessis läbitud punktid, on vaadeldava punktihulga kumerkate. Joonisel 16 on kujutatud vabalt valitud 7-tipulise punktihulga kumerkate (mis osutub 5-nurgaks) koos lahenduses mainitud tükeldusega kolmnurkadeks.

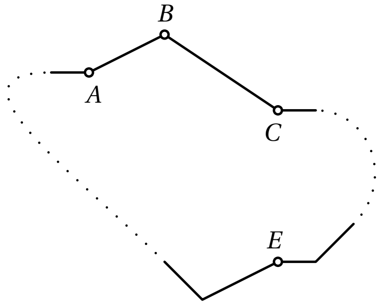
Lahendus 2. Näitame, et mittekumera n-nurga tippude hulgast saab leida 4 sellist, mis määravad mittekumera nelinurga. Olgu A, B ja C hulknurga järjestikused tipud, mille korral B juures asuv sisenurk on suurusega



Joonis 17



Joonis 18



Joonis 19

üle 180° (ülinürinurk). Olgu A' ja C' punktid vastavalt nurga ABC haarade AB ja BC pikendustel üle punkti B; vaadeldavat hulknurka piirav kinnine murdjoon peab läbima nurka $A'BC'$. Kui nurga $A'BC'$ sees asub mõni selle hulknurga tipp X, siis on $ABCX$ mittekumer nelinurk (joonis 17). Teine võimalus on, et nurka $A'BC'$ läbib mõni selle hulknurga külg DE, kus D asub tipu A ja E tipu C pool. Näitame, et sel juhul on $DBCE$ mittekumer nelinurk. Tõepoolest, vastasküljed DB ja CE ei lõiku, kuna asuvad erinevates sirgete AA' ja CC' poolt piiratud tasandi osades, vastasküljed BC ja ED aga ei lõiku, kuna on algse hulknurga küljed. Nurk DBC on aga suurusega üle 180°.

Lahendus 3. Näitame induktsiooniga tippude arvu n järgi, et mittekumera n-nurga tippude hulgast saab leida 4 sellist, mis määravad mittekumera nelinurga. Kui $n = 4$, siis väide kehtib triviaalselt. Eeldame nüüd, et $n > 4$ ja iga väiksema tippude arvuga mittekumera hulknurga puhul väide kehtib. Mittekumeras hulknurgas leidub sisenurk suurusega üle 180°, ilmselt peab leiduma ka sisenurk suurusega alla 180°. Veendume algul, et ei saa olla nii, et hulknurga iga kaks tippu, millest ühe juures on nurk suurusega alla 180° ja teise juures üle 180°, on omavahel naabrid. Tõepoolest, kuna igal tipul on vaid kaks naabrit, saaks sellisel juhul olla hulknurgas ülimalt 2 nurka suurusega alla 180° ja ülimalt 2 nurka suurusega üle 180°, kuid see on vastuolus tingimusega $n > 4$. Seega on võimalik leida sellised kolm järjestikust tippu A, B ja C ning mingi neist kõigist erinev tipp E, et tipu B juures on sisenurk suurusega alla 180° ja tipu E juures on sisenurk suurusega üle 180° (joonis 19). Kui mingi tipp X asub kolmnurga ABC sees, siis nelinurk $ABCX$ on mittekumer. Kui kolmnurga ABC sees ei asu ühtki hulknurga tippu, siis jättes hulknurgast välja tipu B, saame $n - 1$ tipuga hulknurga, mille tipu E juures on endiselt ülinürinurk. Induktsiooni eelduse põhjal leidub mittekumer nelinurk, mille tipud asuvad selle hulknurga tippudes.

Hindamisskeemid

1. *(Hartvig Tooming)*

Lahendusi oli kahte tüüpi, mille hindamiseks kasutasime ka kaht erinevat skeemi.

Skeem lahenduse jaoks, mis ei eelda konkreetset kirjade arvu. Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Ülesande tekst matemaatiliselt õigesti tõlgendatud: 1 p
- Leitud, et pärast kustutamist jäi alles 20% kirjadest: 4 p
- Leitud, et kustutati 80% kirjadest: 2 p

Skeem lahenduse jaoks, mis eeldab konkreetset kirjade arvu. Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Ülesande tekst matemaatiliselt õigesti tõlgendatud: 1 p
- Leitud, et pärast kustutamist jäi alles 20% kirjadest: 2 p
- Leitud, et kustutati 80% kirjadest: 1 p
- Põhjendatud, et see meetod toimib antud ülesandes korrektselt: 3 p

Ainult õige vastuse eest anti 1 punkt ning lahenduses esinevate kergete loogika- ja arvutusvigade eest võeti maha 1–3 punkti. Ka põhjendamata sammude eest võeti 1–3 punkti maha.

2. *(Markus Rene Pae)*

Ülesannet lahendati mitmel viisil ning seetõttu kasutasime kaht erinevat hindamisskeemi.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Saadud võrrandist $x + (x + 1) = x + 2$ kolmik $(1, 2, 3)$: 2 p
- Saadud võrrandist $(x + 2) + (x + 1) = x$ kolmik $(-3, -2, -1)$: 2 p
- Saadud võrrandist $x + (x + 2) = x + 1$ kolmik $(-1, 0, 1)$: 3 p

Kui üks kolmikutest $(1, 2, 3)$ ja $(-3, -2, -1)$ oli leitud, siis teise kolmiku leidmine ilma võrrandita (st sümmeetria kaalutlusel) andis 2 punkti.

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Vaadeldud kolmikuid, kus kõik arvud on positiivsed täisarvud, ning jõutud veenva põhjendusega ainsa kolmikuni $(1, 2, 3)$: 2 p

- ◦ Vaadeldud kolmikuid, kus kõik arvud on negatiivsed täisarvud, ning jõutud veenva põhjendusega ainsa kolmikuni $(-3,-2,-1)$: 2 p
- ◦ Vaadeldud kolmikuid, milles leidub vähemalt üks negatiivne täisarv ja üks positiivne täisarv ning jõutud seeläbi kolmikuni $(-1,0,1)$: 3 p

Küllalt levinud oli ka katse-eksitusmeetodil probleemile lähenemine. Oli läbi katsetatud kõik kolmikud, milles leidub kas arv 1 või -1 ning põhjendatud, et kolmikutes olevad arvud ei saa minna suuremaks ega väiksemaks kui vastavalt $(1,2,3)$ ja $(-3,-2,-1)$. Katse-eksitusmeetodil leitud kolmikute eest anti punkte 1 võrra vähem leitud kolmikute arvust.

Üldiselt oli ülesanne lihtne ning üsna paljud õpilased said selle eest maksimaalsed võimalikud punktid. Peamiselt kaotati punkte tähelepanematusest – leidus töid, kus oli kaheldud, kas väärtuse poolest „keskmine" arv saab olla ülejäänud kahe arvu summa.

3. *(Jaan Toots)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ◦ Paariskohtadele tuleb valida algarv 2: 2 p
- ◦ Ülejäänud kohtade süstemaatiline vaatlemine: 5 p

Algarvulisuse valesti määramise tõttu tekkinud vead reeglina vähendasid punkte 1–3 võrra, vastavalt sellele, mil määral tehtud viga lihtsustas läbivaatamist.

Ülesandest oli võimalik mitmeti valesti aru saada nii, et sisu olulisel määral ei muutunud. Lahendused, kus otsiti ainult kahe astmeid teguriteks said kuni 2 punkti (idee ja kitsendatud läbivaatamise eest). Kitsendades paarikaupa erinevatele algarvudele oli võimalik saada kuni 5 punkti süstemaatilise vaatluse eest.

4. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ◦ Leitud kõik 12 lahendit: 3 p
- ◦ Tõestatud, et rohkem lahendeid pole: 4 p

  Sealhulgas tüüpilise mõttekäigu allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti:

  - Tähele pandud, et $d = 1$: *1 p*
  - Tõestatud üheliste ülekandumine: *1 p*
  - Tõestatud kümneliste ülekandumine: *1 p*

Ülesanne oli töömahukas ning kõrgete punktidega lahendusi esines seetõttu vähe. Levinumad vead olid järgmised.

- Eeldati, et arv võib alata ka nulliga, mis sai mõnes töös peamiseks takistuseks järelduseni $d = 1$ jõudmisel.

- Ei kontrollitud leitud „lahendites“, kas igale tähele vastab erinev number või kas saadud liitmistehe ka korrektne on.
- Üritati ülesandele läheneda kombinatoorselt, nt „Paari (h, i) väärtused saab valida 17 erineval viisil. Kuna p ja m on vahetuvad, tekib $17 \cdot 2 = 34$ võimalust.“ Kombinatoorne lähenemine nõuaks üksühesuse vastavuse tõestamist, antud näites paaride (h, i) ja lahendite vahel, mis käesolevas ülesandes olnuks väga keeruline, et mitte öelda võimatu.
- Ei osatud rakendada „meelde jätmist“ uute võrrandite ja võrratuste koostamisel. Samuti jõuti mitmes töös üheliste ja kümneliste vaatlemisel järeldusele, et $e = 0$, ehkki samade tähelepanekute juures olnuks õige järeldus $e < h$.

5. *(Kaur Aare Saar)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ∘ Näidatud, et $\triangle AMB \sim \triangle DMC$ ja $\triangle BMC \sim \triangle AMD$: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud samale kaarele toetuvad võrdsed piirdenurgad: *2 p*
- ∘ Lahendus lõpuni viidud lähtudes kolmnurkade sarnasusest: 3 p

Üllatavalt vähe õpilasi oskas kasutada piirdenurkade omadust. Olles sarnased kolmnurgad leidnud, ei eksitud üldjuhul külje AD pikkuse arvutamisega.

6. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- ∘ Näidatud, et T-kujulist tükki peab kasutama: 3 p
- ∘ Näidatud, et ühtki ülejäänud tükkidest ei pea kasutama: 2 p
- ∘ Näidatud, et kõiki tükke saab kasutada: 2 p

Esimese rea eest sai ühe punkti juhul, kui oli väidetud, et T-kujulist tükki peab kasutama ilma vettpidava põhjenduseta (näiteks et muidu ei saa trepiastmeid täita või et muidu jääb kusagile auk). Kui skeemi teises reas oli näidatud, et kolme tükki ei pea kasutama (nelja asemel), siis sai ka selle rea eest 1 punkti.

Enamuses töödest oli olemas põhjendus, et ülejäänud tükke peale T-kujulise ei pea kasutama ning sellest järeldatud, et T-kujulist peab kasutama. See järeldus pole aga korrektne. Mõnedes töödes oli aga värvimise abil korrektselt näidatud, et T-tükki peab kasutama ning sellest (või siis värvimisest endast) järeldatud, et teisi tükke ei pea kasutama. See pole samuti korrektne. Sellised tööd said üldiselt 5 punkti.

Mõnes töös oli püütud näidata, et T-kujulist tükki peab kasutama, värvimise asemel kõiki trepi kokkupanemise variante ilma T-tükita läbi vaadates. See on põhimõtteliselt võimalik, kuigi üsna pikk arutlus, ning ühes töös oligi see õnnestunud. Veel paaris töös oli osa variante vaatamata jäänud; kui seejuures oli siiski oluline osa läbi vaadatud, siis andsime skeemi esimese rea järgi 2 punkti.

Peaaegu kõigis töödes oli korrektne b) osa lahendus, selleks piisas ka ainult ühest näitest, või siis kahest a) osas vaja läinud näitest.

Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)*

Tüüpiliste tähelepanekute ja tegevuste eest anti punkte järgnevalt. Punktid liideti esimese ja teise rea koosesinemisel või kolmanda ja neljanda rea koosesinemisel. Muudel juhtudel punkte ei liidetud.

- Üldisust kitsendamata eeldatud, et üks tipp asub koordinaatide alguspunktis (ilma midagi lisaks eeldamata): 1 p
- Kirjutatud välja kolme külje pikkuste võrdused koordinaatide kaudu: 1 p
- Täheldatud, et kolmnurga külje ja kõrguse suhe pole ratsionaalarv: 1 p
- Täheldatud, et kõrguse aluspunkti koordinaadid peavad olema ratsionaalarvulised: 1 p
- Muidu täislahendus, kuid pole kaetud juht, kus üks külgedest on paralleelne koordinaatteljega: 6 p
- Täislahendus: 7 p

Vahepealseid punkte võis teenida sõltuvalt sellest, kui kaugele jõudis lahendus võrreldes mõne täieliku lahendusega (vt ka žürii lisalahendusi 3, 4, 5).

Paljud lahendajad eeldasid, et kolmnurga üks külgedest peab olema koordinaatteljega paralleelne. Tegemist on erijuhuga, vaadata tuleb kindlasti ka üldist juhtu. Esines ka väär väide, et täisarvu ruutu pole võimalik esitada mitmel erineval viisil positiivsete täisarvude ruutude summana. Et see pole nii, näitab näide $25^2 = 20^2 + 15^2 = 24^2 + 7^2$.

Ülesandel leidus palju erinevaid lahendusi, kuid algselt lihtsana mõeldud ülesanne ei osutunud lahendajatele siiski lihtsaks.

2. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et otsitaval arvul on ülimalt 4 erinevat algtegurit: 1 p
- Tõestatud, et üks algtegur on 2: 1 p
- Tõestatud, et üks algtegur on 3: 1 p
- Tõestatud, et ükski algtegur ei ole 13 või suurem: 1 p

- Tõestatud, et ükski tegur ei esine astmes 2: 1 p
- Järelejäänud variantide hulgast leitud õige arv: 2 p

Esines järgmisi tüüpilisi vigu.

- Variantide läbivaatus polnud ammendav, samas puudusid ka sõnalised selgitused, miks ülejäänud variante vaadelda ei tule.
- Eeldati, et arv on nelja erineva algteguri korrutis ja ei arvestatud, et mõni algtegur võib arvus esineda suuremas astmes kui 1.
- Uuriti lihtsalt erinevate tegurite arvu, mitte erinevate algtegurite arvu. Ülesande tingimustel saab arvul olla maksimaalselt 24 erinevat tegurit, suurim selline arv on $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.

3. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud, et piisab leida lõpmata palju taandumatuid murde kujul $\frac{mc-a}{md-b}$, kus $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ on vastavalt u ja x esitused taandumatu murruna: 1 p
- Näidatud, et iga positiivne täisarv, millega murd $\frac{mc-a}{md-b}$ on taandatav, on arvu $ad-bc$ tegur: 2 p

  Sealhulgas:
  - Saadud võrdus $ad-bc = cf-de$, kus $v = \frac{e}{f}$: *1 p*
- Järeldatud, et kõik murrud kujul $\frac{mc-a}{md-b}$ on taandatavad vaid lõpliku arvu erinevate algarvudega: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Punkte ei antud tõestamise eest, et erinevate kordajate m puhul on murru $\frac{mc-a}{md-b}$ väärtus erinev, sest taandumatust arvestades on see ilmne.

Ükski lahendaja ei saanud üle 3 punkti. Kõik punktid saadi skeemi kahe esimese rea eest. Oli arvata, et ülesanne on raske, aga et ühtki ligilähedaseltki täielikku lahendust ei tule, oli üllatav.

4. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $f(0) = 0$: 1 p
- Saadud võrdus $(f(x))^2 = xf(x)$ või sellega ekvivalentne võrdus: 1 p
- Leitud lahendid $f(x) = x$ ja $f(x) = 0$: 1 p
- Viidud lõpule tõestus, et $f(x) = x$ ja $f(x) = 0$ on ainsad võimalikud lahendid: 4 p
- *Sealhulgas:*

- Kirjeldatud mingilgi moel, et eksisteerib funktsioone, mis ei ole $f(x) = x$ või $f(x) = 0$ ja mille puhul siiski iga x jaoks $f(x) = x$ või $f(x) = 0$: *1 p*

Punkte ei antud vaid ühe lahendi leidmise eest. Lahenduste äraarvamine või tuletamine tõestamata või mittekorrektsetest eeldustest andis vaid ühe lahendite leidmise eest saadava punkti.

5. *(Kaarel Hänni)*

Et ülesannet lahendati mitmel viisil, siis kasutasime kaht erinevat hindamisskeemi.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kolmnurk XYZ ja kolmnurk ABC on samasihiliste külgedega: 3 p
- Sellest järeldatud, et $|AG| = \frac{1}{3}|AD|$: 2 p
- Eelnevast järeldatud, et $|AL| = \frac{1}{3}|AB|$ ja $|BK| = \frac{1}{3}|AB|$: 2 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude jaoks. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kolmnurk XYZ on kolmnurgaga ABC samasihiliste külgedega: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti:
  - idee vaadata kesklõikudest moodustuvat kolmnurka, näidatud $|MA| = |MX|$ või midagi sarnast: *1 p*
  - järeldatud, et kolmnurgad BMC ja YMZ (või mõni teine samaväärne paar) on kongruentsed, peegeldatud või pööratud 180 kraadi võrra: *1 p*
  - järeldatud põiknurkadest või pöördest, et kolmnurk XYZ ja kolmnurk ABC on samasihiliste külgedega: *1 p*
- Näidatud, et $|FK| = |FL|$: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti:
  - näidatud, et sirge MC poolitab lõigu XY: *1 p*
  - näidatud, et KLZ ja XYZ on sarnased: *1 p*
  - kahest eelmisest punktist järeldatud, et $|FK| = |FL|$: *1 p*
- Võrduse $|FK| = |FL|$ abil järeldatud, et $|AL| = |BK|$: 1 p

Enamik lahendustest olid sarnased žürii lahendusega 2. Lisaks žürii lahenduse 2 mõttekäigule kasutati sellega sarnastes lahendustes kolmnurkade XYZ ja ABC külgede samasihilisuse näitamiseks tihti ka homoteetiat (peegeldust, pööret). Lahenduse lõpu võib asendada ka kolmnurga AMZ vaatamisega. Sellisel juhul oli skeemi esimese rea asemel 3 punkti väärt näitamine, et sirge YZ poolitab lõigu AM.

6. *(Ago-Erik Riet)*

Olgu ABC antud hulknurga sisenurk, mis on suurem kui 180° (ülinürinurk). Olgu DE selline hulknurga külg, mille otspunktid asuvad nurka ABC täispöördeks täiendava nurga erinevates kõrvunurkades ning mis ei lõika nurga ABC haarasid.

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Muidu täislahendus, aga põhjendus vale, miks sirgest BC teisel pool punkti A leidub märgitud punkt (ja sümmeetriliselt): 6 p
- Muidu täislahendus, aga väidetud, et suvalise (või fikseeritud) kõrvunurgas asuva D jaoks leidub teises kõrvunurgas E: 5 p
- Õigesti tõestatud, et mittekumera viisnurga tippudest saab leida mittekumera nelinurga: 2 p
- Proovitud induktsiooni abil hulknurga tippude arvu vähendada, aga induktsioonis tehtud mõni oluline viga (kontranäide konstrueerimata): 1 p
- Tõestatud, et juhul, kui nurka ABC täispöördeks täiendava nurga tippnurgas asub märgitud punkt, siis leidub mittekumer nelinurk: 1 p

Lahendusi oli enamasti kolme tüüpi. Esiteks žürii tüüpi lahendus. Teiseks lahendus, mis alustab hulknurga ülinürinurgaga ABC ja siis vaatleb esiteks juhtu, kus selle ülinürinurga täispöördeks täiendava nurga tippnurgas leidub märgitud punkt ja teiseks juhtu, kus leidub hulknurga külg DE, mille otspunktid on täispöördeks täiendava nurga erinevates kõrvunurkades ning mis ei lõiku hulknurga mainitud ülinürinurka ABC täispöördeks täiendava nurgaga. Kolmandaks induktsiooniga lahendus punktide arvu vähendamise teel. Induktsiooniga lahendus oli õigesti läbi viidud ainult ühes töös – sel viisil oli enamasti mõni tähtis juht läbi vaatamata jäänud, millest oleks lihtsasti aru saanud kontranäite konstrueerimise teel.

Punkti ei saanud kolmnurga kumerusest ega mittekumera nelinurga kujust arusaamise eest, ega ka hulknurga sisenurkade summa teadmise eest. Vastuväitelise „tõestuse“ ehk väite vastuväiteliseks tõlkimise eest punkte ei saanud, sest see ülesannet kergemaks ei tee.

Mõnikord polnud aru saadud, mis on hulknurga välis- ja mis sisepiirkond: sisepiirkond on tasandi piiratud osa (leidub ring, mille sisse see tervenisti jääb) ja sisenurgad asuvad hulknurga sisepiirkonna pool.

Tööde hindamine oli raske, sest tähistada ja mõelda sai väga mitmel erineval viisil ning palju esines põhjendamata ja pooltõeseid väiteid. Samuti sõnavara polnud paljudele lahendajatele tuttav ja mõeldi oma sõnu välja, samuti tehti sõnavaraga seonduvaid vigu.