Открытое соревнование по математике

7 октября 2006 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Эскалатор торгового центра, у которого в каждый момент времени виден отрезок в 75 ступенек, движется вверх со скоростью одна ступенька за 2 секунды. В момент времени 0 на ступеньке, которая расположена на одинаковом расстоянии от обоих концов, стоит лицом в направлении движения Юра. Он двигается согласно чётким правилам: один шаг вперёд, два шага назад, затем снова один вперёд, два назад и т.д., перемещаясь каждую секунду одним шагом на одну ступеньку. В какой конец Юра таким образом в итоге доберётся, и в какой момент времени это произойдёт?
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E, F, G и H являются соответственно центрами сторон AB, BC, CD и DA. Доказать, что из треугольников EFB, FGC, GHD ja HEA можно сложить четырёхугольник, равный четырёхугольнику $EFGH$.
3. Найти все не более чем четырёхзначные положительные целые числа, при написании цифр которых в обратном порядке полученное число делится на первоначальное и при этом от него отлично.
4. Назовём разносторонний треугольник K *превращаемым*, если найдётся подобный ему треугольник K', две наименьшие стороны которого равны по длине двум наибольшим сторонам треугольника K. Превращаемый треугольник K назовём *целочисленным*, если все длины его сторон — целые числа (при этом длина наибольшей стороны соответствующего треугольника K' не обязана быть целым числом).
   а) Найти длины сторон целочисленного превращаемого треугольника с наименьшим периметром.
   б) Пусть K — произвольный целочисленный превращаемый треугольник, для которого не найдётся меньшего подобного ему целочисленного превращаемого треугольника. Доказать, что длины по меньшей мере двух сторон треугольника K — квадраты целых чисел.
5. В школьном теннисном турнире принимает участие m игроков, $m \geqslant 2$. Каждая игра состоит из 4 сетов. Если игрок выигрывает за игру больше половины сетов, то он получает в турнирную таблицу за эту игру 2 очка. Если он выигрывает ровно половину сетов, он получает 1 очко, а если выигрывает менее половины сетов, то получает 0 очков. В турнире каждый участник играет с каждым другим участником ровно одну игру. Найти наименьшее число участников m, при котором возможна ситуация, что какой-то участник выигрывает за турнир больше сетов, но набирает меньше очков, чем любой другой.

Открытое соревнование по математике

7 октября 2006 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. *Треугольными* называют числа в виде $a_n = 1 + 2 + \ldots + n$, где $n \geqslant 1$. Доказать, что если $2a_m = a_n$, то a_{2m-n} является квадратом целого числа.
2. Вершины треугольника ABC являются центрами трёх окружностей, которые попарно внешне касаются друг друга. Эти три окружности внутренне касаются окружности c. Доказать, что если центр окружности c совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC, то треугольник ABC равносторонний.
3. Пусть b — положительное чётное число, для которого найдётся такое натуральное число $n > 1$, что $\dfrac{b^n - 1}{b - 1}$ — квадрат целого числа. Доказать, что b делится на 8.
4. Последовательность чисел Фибоначчи (F_k) определена соотношениями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для каждого $k = 2, 3, \ldots$. Пусть дано положительное целое число n и многочлен $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$, удовлетворяющий следующим двум условиям:
   1) $P(F_n) = F_n^2$;
   2) $P(F_k) = P(F_{k-1}) + P(F_{k-2})$ для каждого $k = 2, 3, \ldots, n$.

   Найти сумму коэффициентов многочлена P.
5. Пусть n — фиксированное натуральное число. *Лабиринт* — это клетчатое поле размерами $n \times n$, на одной клетке которого находятся небесные врата, и некоторые соседние клетки которого разделены перегородками так, что с каждой клетки можно тем не менее попасть на любую другую клетку. *Программа* — это конечная последовательность команд ВВЕРХ, ВНИЗ, ВПРАВО, ВЛЕВО; в результате исполнения каждой команды Существо передвигается с прежней клетки на соответствующую соседнюю, если перегородка или внешняя граница лабиринта не препятствуют исполнению команды (в противном случае Существо не делает ничего); при попадании на клетку с вратами Существо перемещается сразу на небеса. Бог создаёт программу, после чего Дьявол создаёт лабиринт и помещает Существо на какую-то его клетку. Доказать, что Бог может составить такую программу, что вне зависимости от составленного Дьяволом лабиринта и выбранной исходной клетки Существо, следуя программе, попадёт в любом случае на небеса.