Matemaatika lahtine võistlus

6. veebruar 2005

Lahendused ja vastused

Noorem rühm

1. *Vastus:* $(0,0,0)$, $(2,0,2)$, $(2,1,1)$ ja $(2,2,0)$.

Lahendus 1. Et esimese võrrandi vasak pool peab olema mittenegatiivne, siis peavad kehtima võrratused $b \leqslant a$ ja $c \leqslant a$. Teise võrrandi põhjal siis $a^2 = 2(b+c) = 2b+2c \leqslant 2a+2a = 4a$ ehk $a^2 \leqslant 4a$, millest $a \leqslant 4$. Lisaks järeldub teisest võrrandist, et a on paarisarv. Seega tulevad a väärtustena kõne alla arvud 0, 2 ja 4. Kui $a = 0$, siis ka $b = 0$ ja $c = 0$, see lahend rahuldab mõlemat võrrandit. Kui $a = 2$, siis teise võrrandi põhjal $b+c = 2$, millest saame variandid $b = 0$, $c = 2$; $b = 1$, $c = 1$ ja $b = 2$, $c = 0$. Kõik need rahuldavad ka esimest võrrandit. Kui $a = 4$, siis teise võrrandi põhjal $b+c = 8$. Et b ega c ei ole suuremad kui a, siis ainsa võimalusena $b = 4$ ja $c = 4$. See lahend ei rahulda esimest võrrandit.

Lahendus 2. Kui $a = 0$, siis teise võrrandi põhjal $b = c = 0$. Eeldame järgnevas, et $a > 0$. Esimesest võrrandist $b^3 + c^3 = a^3 - 3abc \leqslant a^3$. Seega

$$\begin{aligned} a^6 = 8(b+c)^3 = 8(b^3+c^3+3b^2c+3bc^2) \leqslant \\ \leqslant 8a^3 + 24bc(b+c) = 8a^3 + 12a^2bc = 4a^2(2a+3bc), \end{aligned}$$

millest $a^4 \leqslant 4(2a+3bc)$. Arvestades esimesest võrdusest järelduvat võrratust $3abc \leqslant a^3$ ehk $3bc \leqslant a^2$, saame

$$a^4 \leqslant 4(2a+a^2) = 4a(a+2),$$

millest $a^3 \leqslant 4(a+2)$. Siit $a \leqslant 2$. Et teise võrrandi tõttu a on paaris, siis $a = 2$. Teine võrrand annab siis $b + c = 2$. Jääb kontrollida lahendid $(2,0,2)$, $(2,1,1)$ ja $(2,2,0)$.

Lahendus 3. Esimene võrrand annab, et $a = 0$ parajasti siis, kui $b = c = 0$. Seega üks lahend on $(0,0,0)$ ja edasises võime eeldada, et nii a kui ka vähemalt üks arvudest b ja c on positiivne. Esimesest võrrandist avaldame $3bc$:

$$3bc = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a} = a^2 - \frac{b^3+c^3}{a} = a^2 - \frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{a}.$$

Viimastes sulgudes oleva avaldise esitame kujul $b^2 - bc + c^2 = (b+c)^2 - 3bc$. Asendades summa $b+c$ teise võrrandi põhjal, leiame edasi

$$3bc = a^2 - \frac{a^2\left(\frac{a^4}{4} - 3bc\right)}{2a} = a^2 - \frac{a^5}{8} + \frac{a}{2}\cdot 3bc.$$

Võttes kokku võrduste ahela esimese ja viimase liikme, saame

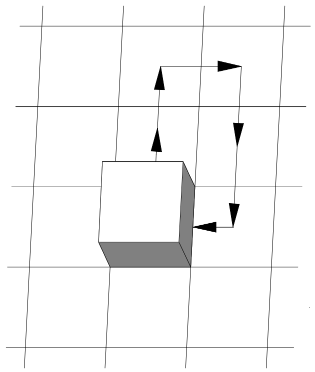
$$3bc\left(1 - \frac{a}{2}\right) = a^2\left(1 - \frac{a^3}{8}\right) = a^2\left(1 - \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}\right).$$

Kui $1 - \frac{a}{2} = 0$, siis $a = 2$, mis teise võrrandisse pannes annab $b+c = 2$. Siit saame lahendid $(2,0,2)$, $(2,1,1)$, $(2,2,0)$. Kui $1 - \frac{a}{2} \neq 0$, jagame sellega läbi ja saame

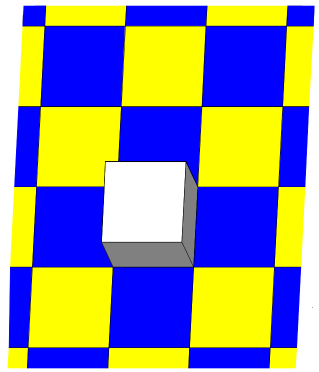
$$3bc = a^2\left(1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}\right) > a^2.$$

Kuid esimesest võrrandist tuleb $3bc < a^2$, vastuolu. Seega rohkem lahendeid ei ole.

Märkus. Eeldus arvude mittenegatiivsuse kohta on oluline. Kui lubada ka negatiivseid täisarve, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid: valime $a = 0$ ja $b = -c$.



Joonis 1



Joonis 2

2. *Vastus:* a) jah; b) ei.

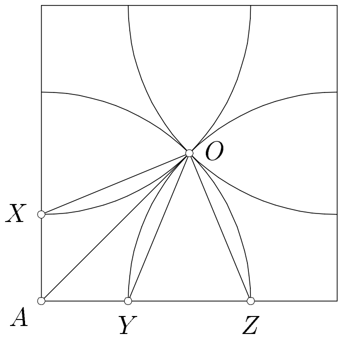
Lahendus 1. a) Pöörame kuupi järgmiselt: kaks sammu edasi, üks samm paremale, kaks sammu tagasi, üks samm vasakule (joonis 1). Pärast neid kuut sammu satub kuup tagasi esialgsele ruudule, kuid valge tahk on nüüd pöördunud allapoole. Ülejäänud 1998 sammu teeme kahekaupa: pöörame kuubi suvalisele naaberruudule ja seejärel esialgsele ruudule tagasi.

b) Värvime ruudud malelaua moodi näiteks kollaseks ja siniseks nii, et alguses asub kuup kollasel ruudul (joonis 2). Et kollaselt ruudult saab kuup liikuda ainult sinisele ja siniselt ruudult ainult kollasele, siis asub kuup pärast paarisarvu käike alati kollasel ruudul ja pärast paaritut arvu käike sinisel. Seega asub kuup pärast 2005 käiku esialgsega võrreldes vastandvärvi ruudul.

Lahendus 2. a) Pöörame kuupi järgmiselt: kaks sammu edasi, üks samm vasakule, kaks sammu edasi, kaks sammu paremale, neli sammu tagasi, üks samm vasakule. Nende 12 sammuga on kuup tagasi esialgsel ruudul, kusjuures valge tahk on pöördunud allapoole. Seda tsüklit korrates näeme, et pärast paaritut arvu tsükli läbimisi on kuubi valge tahk allpool, pärast paarisarvu läbimisi aga üleval. Et $2004 = 12 \cdot 167$, siis korrates vaadeldavat tsüklit 167 korda, jõuamegi vajaliku seisuni.

b) Eeldame, et kuup sooritab ringkäigu ja jõuab tagasi samale ruudule, kust alustas. Olgu a, b, c ja d selle ringkäigu jooksul tehtud sammude arvud vastavalt paremale, vasakule, üles ja alla. Et lõpuks peab kuup asuma samas veerus, kus alguses, siis peab paremale ja vasakule tehtavate sammude arvud olema võrdsed ehk $a = b$. Analoogiliselt $c = d$. Üldse teeb kuup $a + b + c + d = 2(a + c)$ sammu, mis on paarisarv. Järelikult ei saa kuup paaritu arvu sammudega esialgsele ruudule tagasi jõuda.

3. *Lahendus 1.* Sümmeetria tõttu asuvad kõik lõikepunktid ruudu keskpunktist ühekaugusel. Näitame, et kõik moodustuvad kesknurgad on 45°. Olgu O ruudu keskpunkt, A ruudu tipp ning X, Y ja Z kolm uuritavat lõikepunkti (joonis 3). Võrdhaarsed kolmnurgad OYZ ja AOZ on sarnased ühise alusnurga tõttu, järelikult $\angle YOZ = \angle OAZ = 45°$. Et sümmeetria tõttu $\angle XOZ = 90°$, siis ka $\angle XOY = 45°$. Ülejäänud nurkade puhul toimime samamoodi.



Joonis 3

Lahendus 2. Valime koordinaatteljestiku alguspunktiga punktis A nii, et ruudu küljepikkus on 1. Ruudu keskpunkti koordinaadid on siis $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$ ning ringjoonte raadiused $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Järelikult on punkti X koordinaadid 0 ja $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, punkti Y koordinaadid $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja 0 ning punkti Z koordinaadid $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja 0. Seetõttu

$$|XY|^2 = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

ja

$$|YZ|^2 = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Vaadeldava kaheksanurga küljed on järelikult kõik võrdse pikkusega. Et lisaks asuvad kaheksanurga tipud punktist O samal kaugusel, siis on see kaheksanurk korrapärane.

Lahendus 3. Kuna kõik lõikepunktid asuvad ruudu keskpunktist ühekaugusel, siis piisab ülesande lahendamiseks näidata, et $|XY| = |YZ|$. Olgu a ruudu küljepikkus, lisaks tähistame $|YZ| = x$ ja $|XY| = z$. Vaadeldes esiteks ruutu, mille kolm tippu joonisel on X, A ja Y ning teiseks ringjoont raadiusega $|AZ| = |AO|$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} z = \dfrac{a - x}{2} \cdot \sqrt{2} \\ x + \dfrac{a - x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist $a = \sqrt{2}z + x$. Asendades selle teise võrrandisse, saame

$$x + \frac{\sqrt{2}z + x - x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}z + x)$$

ehk pärast lihtsustamist $x + \frac{\sqrt{2}}{2}z = z + \frac{\sqrt{2}}{2}x$. Paigutades liikmeid ümber, saame $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$. Et ilmselt $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$, siis $x = z$.

4. *Lahendus 1.* Olgu $\frac{a + b}{a - b} = m$. Siis $a + b = ma - mb$, millest $\frac{a}{b} = \frac{m + 1}{m - 1}$. Et a ja b on eelduse kohaselt ühistegurita, siis leidub täisarv k nii, et $m + 1 = ka$

ja $m-1=kb$. Korrutades need võrdused, saame $m^2-1=k^2ab$, kust $k^2ab+1=m^2$. Arv k kui arvude $m-1$ ja $m+1$ ühine tegur peab olema ka nende arvude vahe ehk arvu 2 tegur. Järelikult saab k olla vaid 1 või 2, millega ülesanne on lahendatud.

Lahendus 2. Olgu $\frac{a+b}{a-b}=m$. Siis $a+b=m(a-b)$ ehk

$$(m-1)a=(m+1)b.$$

Vastavalt eeldusele on siin a ja b ühistegurita. Kui m on paarisarv, siis on $m-1$ ja $m+1$ kui kaks järjestikust paaritut arvu samuti ühistegurita, mistõttu võrdus saab kehtida ainult juhul $a=m+1$ ja $b=m-1$ (sest a ja b peavad olema positiivsed). Siis aga $ab+1=(m+1)(m-1)+1=m^2$. Kui m on paaritu arv, st $m=2k+1$, siis $m-1=2k$, $m+1=2(k+1)$ ning ülaltoodud võrdus teiseneb kujule

$$ka=(k+1)b.$$

Et k ja $k+1$ on ühistegurita, siis saab see võrdus kehtida ainult juhul $a=k+1$, $b=k$. Sel juhul on $4ab+1=4(k+1)k+1=(2k+1)^2$.

Lahendus 3. Kui d on suvaline positiivne täisarv, millega jagub murru nimetaja $a-b$, siis jagub arvuga d ka lugeja $a+b$. Järelikult jaguvad d-ga nii lugeja ja nimetaja summa $2a$ kui ka vahe $2b$, millest omakorda järeldub, et $\mathrm{SÜT}(2a,2b)=2\,\mathrm{SÜT}(a,b)=2$ jagub d-ga. Seega $d=1$ või $d=2$. Et d oli murru nimetaja suvaline tegur, siis ei saa ka nimetaja $a-b$ omandada muid väärtusi kui 1 ja 2. Juhul $a-b=1$ on $4ab+1=4(b+1)b+1=(2b+1)^2$, juhul $a-b=2$ on aga $ab+1=(b+2)b+1=(b+1)^2$.

Lahendus 4. Avaldades

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{a-b+b+b}{a-b}=1+\frac{2b}{a-b},$$

näeme, et $\frac{2b}{a-b}$ peab olema täisarv. Arvud b ja $a-b$ on ühistegurita, sest a ja b on ühistegurita. Järelikult peab 2 jaguma arvuga $a-b$, mistõttu $a-b=1$ või $a-b=2$. Kontrollides näeme, et mõlemal juhul ülesande väide kehtib.

5. a) Vaatleme olukorda, kus näiteks võistkond A vastab esimesele küsimusele õigesti ja kõigile ülejäänutele valesti ning kõik teised võistkonnad vastavad esimesele küsimusele valesti ja kõigile ülejäänutele õigesti. Siis kogub võistkond A, kes vastab õigesti ainult ühele küsimusele, $m-1$ punkti, ülejäänud võistkonnad, kes vastavad õigesti $n-1$ küsimusele, koguvad $n-1$ punkti. Et eelduse põhjal $m-1>n-1>1$, siis on võistkonna A puhul õigesti vastatud küsimuste arv väiksem ja kogutud punktide arv suurem kui ühelgi teisel võistkonnal.

b) Olgu $m=3$ ja $n=10$, kusjuures küsimustele 1 ja 2 vastab õigesti ainult võistkond A, küsimustele 3 ja 4 vastab õigesti ainult võistkond B, küsimustele 5–7 vastavad õigesti võistkonnad A ja C ning küsimustele 8–10 võistkonnad B ja C. Siis vastavad A ja B kumbki õigesti 5 küsimusele ja saavad 7 punkti; C vastab õigesti 6 küsimusele ja saab 6 punkti:

võistkond	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	arv	punkte
A	2	2			1	1	1				5	7
B			2	2				1	1	1	5	7
C					1	1	1	1	1	1	6	6

Vanem rühm

1. *Vastus:* $(7,2)$ ja $(35,6)$.

Lahendus 1. Teisendame võrrandi kujule

$$x(7-y)=35.$$

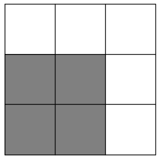
Et x on positiivne, siis peab ka $7-y$ olema positiivne. Vaatame läbi kõik võimalused lahutada arv 35 kahe arvu korrutiseks. Juht $x=1$, $7-y=35$ ei sobi, sest siis oleks $y<0$. Juht $x=5$, $7-y=7$ ei sobi samuti, sest siis oleks $y=0$. Juht $x=7$, $7-y=5$ annab lahendi $(7,2)$. Juht $x=35$, $7-y=1$ annab teise lahendi $(35,6)$.

Lahendus 2. Võrduse paremal poolel peab kas x või y jaguma 7-ga. Kui y jaguks 7-ga, st oleks $y=7y'$, siis saaksime pärast ühise teguri 7 taandamist võrduse $x-5=xy'$, mis ei saa kehtida, sest vasak pool on väiksem kui x, parem pool aga x-st suurem või sellega võrdne. Seega peab x jaguma 7-ga ehk $x=7x'$. Antud võrduse omandab kuju $7x'-5=x'y$ ehk $x'(7-y)=5$. Et 5 on algarv, siis on kaks võimalust: $x'=1$ ja $7-y=5$, mis annab lahendi $x=7$, $y=2$, või $x'=5$ ja $7-y=1$, mis annab lahendi $x=35$, $y=6$.

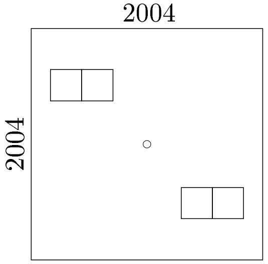
2. *Vastus:* a) Kalle; b) Kalle; c) Juku.

a) Juku suvalisele avakäigule saab Kalle vastuseks teha käigu, mille järel on 3×3 koogi mingist nurgast ära söödud 2×2 tükk (joonis 4). Pärast Juku teist käiku saab Kalle nüüd alati teha veel ühe käigu. Sellega mäng lõpeb, sest alles jääb üksainus tükk.

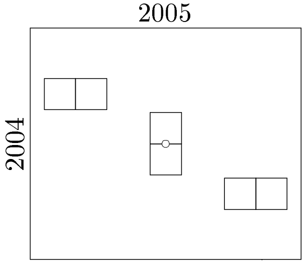
b) Kalle võib kasutada tsentraalsümmeetrilist strateegiat: kui Juku sööb ära mingid kaks tükki, siis sööb Kalle ära kaks tükki, mis asuvad nendega sümmeetriliselt koogi keskpunkti suhtes (joonis 5). Selline strateegia kindlustab, et pärast Kalle iga käiku paiknevad nii söödud kui ka allesolevad tükid koogi keskpunkti suhtes sümmeetriliselt. Kui Juku saab sooritada käigu, siis jääb tema käigul eemaldatud koogiosaga sümmeetriline osa tervenisti alles



Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6

ja Kalle saab samuti käigu sooritada. See tähendab, et esimesena lõpevad käigud Jukul.

c) Juku võib avakäigul süüa kaks tükki, mille vahele jääb koogi keskpunkt, ja edasi käia Kalle käikudega tsentraalsümmeetriliselt (joonis 6), analoogiliselt punktiga b).

Märkus. Selle mängu nimi on Cram, tema täielik analüüs laual, mille pikkus ja laius on paaritud arvud, näib olevat üsna raske ja seda pole siiamaani lõpuni viidud.

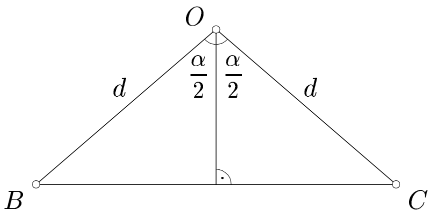
3. *Vastus:* ainuke selline funktsioon on $f(x) = x + 1$.

Lahendus 1. Valides $y = 0$, saame võrduse $f(x + f(0)) = x + f(f(0))$. Selles võrduses teeme muutujavahetuse $x + f(0) = z$, millega tekib seos $f(z) = z - f(0) + f(f(0))$, mis kehtib iga reaalarvu z korral (sest iga reaalarv esitub kujul $x + f(0)$). Järelikult on f lineaarfunktsioon $f(x) = x + a$. Vabaliikme a leidmiseks valime viimases avaldises $x = 2004$, funktsiooni teadaolevat väärtust kasutades saame $a = f(2004) - 2004 = 1$. Kontrollimisel selgub, et funktsioon $f(x) = x + 1$ rahuldab ülesande tingimusi.

Lahendus 2. Võttes $x = -f(f(y))$, näeme, et funktsiooni väärtus mingil kohal on 0. Valime nüüd y väärtuse nii, et oleks $f(y) = 0$. Siis $f(x) = x + f(0)$. Tingimusest $f(2004) = 2005$ leiame, et $f(0) = 1$. Seega $f(x) = x + 1$.

4. *Lahendus 1.* Valime antud kolmel kiirel vastavalt kolm punkti A, B ja C nii, et $|OA| = |OB| = |OC| = d$ ja $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$ ning $\angle AOB = \gamma$. Need kolm punkti on ülesande tingimuste järgi erinevad ja ei asu ühel sirgel. Võrdhaarsest kolmnurgast BOC, mille tipunurk on α ja haara pikkus d (joonis 7), saame $|BC| = 2d\sin\frac{\alpha}{2}$. Analoogiliselt leiame kolmnurkadest COA ja AOB, et $|CA| = 2d\sin\frac{\beta}{2}$ ja $|AB| = 2d\sin\frac{\gamma}{2}$. Et kolmnurga ABC küljepikkuste vahel kehtib võrratus

$$|BC| + |CA| > |AB|,$$



Joonis 7

siis

$$2d\sin\frac{\alpha}{2} + 2d\sin\frac{\beta}{2} > 2d\sin\frac{\gamma}{2},$$

millest pärast jagamist arvuga $2d$ saamegi otsitava võrratuse.

Lahendus 2. Näitame kõigepealt, et $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. Vaatleme kahte kiirt, mille vahel moodustub nurk γ, ning nende kiirte kui telgede ümber kujundatud koonuseid, mille ühiseks moodustajaks on ülejäänud kolmas kiir. Telgedega määratud tasandil lõikab esimene koonus siis nurgast γ ära nurga α, teine koonus aga nurga β. Kui oleks $\gamma > \alpha + \beta$, siis viimased kaks nurka ei kattuks, mistõttu koonustel poleks peale tipu muid ühiseid punkte. Seega $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. Et teiselt poolt $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 360°$, siis

$$\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \leqslant 180° - \frac{\gamma}{2}.$$

Seetõttu

$$\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2},$$

sest $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\gamma}{2}$ on suuremad kui $0°$ ega ületa $90°$ ning $\cos\frac{\beta}{2} < 1$ ja $\cos\frac{\alpha}{2} < 1$.

Lahendus 3. Samamoodi nagu lahenduses 2 leiame summa $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ alam- ja ülemtõkke. Et $\frac{\alpha}{2}$ ja $\frac{\beta}{2}$ peavad olema teravnurgad, siis leidub kolmnurk, mille kaks nurka on suurustega $\frac{\alpha}{2}$ ja $\frac{\beta}{2}$. Olgu a ja b nende nurkade vastaskülgede pikkused ja c kolmanda külje pikkus. Kolmnurgavõrratuse põhjal siis $a + b > c$. Siinusteoreemi põhjal on kolmnurga külgede pikkused võrdelised vastasnurkade siinustega, seetõttu annab viimane võrratus

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} > \sin\left(180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \geqslant \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Lahendus 4. Ilmselt

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}.$$

Samamoodi nagu lahenduses 2 leiame $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$ alam- ja ülemtõkke, mille põhjal $\frac{\alpha+\beta}{4}\geqslant\frac{\gamma}{4}$. Et võrratuse mõlemal poolel asuvad esimese veerandi nurgad, siis $\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\geqslant\sin\frac{\gamma}{4}$. Lisaks sellele $\frac{\beta-\alpha}{4}<\frac{\beta}{4}\leqslant\frac{\gamma}{4}$, millest $\cos\frac{\alpha-\beta}{4}=\cos\frac{\beta-\alpha}{4}>\cos\frac{\gamma}{4}$. Järelikult

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}>2\sin\frac{\gamma}{4}\cos\frac{\gamma}{4}=\sin\frac{\gamma}{2}.$$

5. Olgu a_1, a_2, a_3 ja a_4 vastavalt esimese, teise, kolmanda ja neljanda rea vähimad arvud ning b_1, b_2, b_3 ja b_4 samade ridade suurimad arvud. Ilmselt $b_4=a_4$. Et kolmanda rea kahe elemendi jagatis on neljanda rea element, siis $b_3=a_3b_4$. Teises reas paikneb arv, mis on kolmanda rea suurima elemendi ja veel mingi elemendi korrutis. Seega $b_2\geqslant a_2b_3=a_2a_3a_4$. Lõpuks saame analoogiliselt esimese rea kohta $b_1\geqslant a_1b_2\geqslant a_1a_2a_3a_4$. Kõik kolmnurka kuuluvad arvud on suuremad kui 1, sest vastasel korral leiduks kolmnurgas kaks võrdset arvu kas arvule 1 eelnevas reas või arvu 1 sisaldavas ja temale järgnevas reas. Et kõik arvud on erinevad, siis $a_1a_2a_3a_4\geqslant 2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Järelikult $b_1\geqslant 120$. Arv 120 on ka saavutatav, nagu näitab kolmnurk joonisel 8.

10		120		5		15
	12		24		3	
		2		8		
			4			

Joonis 8