Открытое соревнование по решению математических задач

18 февраля 1995 г.

Младшая группа

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В треугольник со сторонами 3см, 4см и 5см вписан прямоугольник, одна сторона которого вдвое длиннее другой и целиком лежит на длиннейшей стороне треугольника. При этом остальные две вершины прямоугольника находятся соответственно на остальных двух сторонах треугольника. Найти длины сторон этого прямоугольника.

2. В таблице размером в 8×8 клеток строки и столбцы занумерованы числами от 2 до 9 и в каждой клетке написано произведение номеров соответствующей строки и столбца. Можно ли стереть некоторые строки и столбцы этой таблицы так, чтобы сумма чисел во всех оставшихся клетках будет простым числом?

3. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размером в $m \times n$ клеток (вершины прямоугольника расположены в узлах, а стороны проведены по линиям клетчатой бумаги). Найти число клеток, которые диагональ этого прямоугольника разделяет на две части.

4. Найти все решения уравнения $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ в целых числах.

5. В учебном подразделении служат 33 молодых солдатов, которые занесены в список в алфавитном порядке под номерами от 1 до 33. Первых двух дежурных определяют по жребию, а далее применяют следующее правило: очередным дежурным будет солдат, номер которого в списке равен сумме номеров двух предыдущих дежурных (если эта сумма не превосходит 33) или меньше указанной суммы на 33 (если эта сумма больше 33). Могут ли рядовые Иванов, Сидоров и Петров дежурить непосредственно один за другим в указанном порядке?

Открытое соревнование по решению математических задач

18 февраля 1995 г.

Старшая группа

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Сколько различных пар (x, y) целых чисел удовлетворяют неравенству $|x| + |y| < 1995$? (Пары (x, y) и (y, x) при $x \neq y$ считаем различными.)

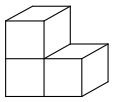
2. Найти наибольшее натуральное число, не содержащее двух одинаковых цифр, такое что сумма его любых трех последовательных цифр делится на 5.

3. Найти все многочлены третьей степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие при всех вещественных значениях x условию

$$p(0) + p(1) + p(x^2) = (x^2 + x^3) \cdot p(x) .$$

4. Найти все точки плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до четырех прямых, проходящих через стороны единичного квадрата, находящегося на этой плоскости, равна 4.

5. а) Можно ли из девяти "уголков", изображенных на рисунке, каждый из которых состоит из трех единичных кубиков, собрать куб развером в $3\times3\times3$ единиц?



б) Можно ли из 26 единичных кубиков собрать два одинаковых тела, из которых в свою очередь можно было составить куб размером $3 \times 3 \times 3$ без центрального единичного кубика?