Открытое соревнование по решению математических задач

6 марта 1993 г.

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 5 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Показать, что многочлен $(4x^2 + 17x + 14)^k - 1$ делится на многочлен $x^2 + 4x + 3$ при любом четном положительном показателе k.

2. Доказать, что число

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{1992 + \sqrt{1993}}}}}}$$

   является решением некоторого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целочисленными коэффициентами.

3. Четыре города расположены в вершинах единичного квадрата. Жители городов хотят построить систему дорог, соединяющую все эти города и имеющую наименьшую суммарную длину. Как ты советуешь им построить дороги, и какой при этом получается их суммарная длина?

4. На плоскости требуется разместить n белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любой прямой, проходящей через некоторые две белые точки, между этими точками лежала хотя бы одна черная точка. Сколько черных точек нужно разместить на плоскости?

5. Внутри равностороннего треугольника ABC берется произвольная точка P. Пусть L, M, N — ортогональные проекции точки P соответственно на стороны AB, BC и CA. Доказать, что

$$\frac{AP}{NL} = \frac{BP}{LM} = \frac{CP}{MN}\,.$$