Teisipäev, 18. juuli 2017

Ülesanne 1. Iga täisarvu $a_0 > 1$ korral on jada $a_0, a_1, a_2, \ldots$ defineeritud seostega

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{kui } \sqrt{a_n} \text{ on täisarv,} \\ a_n + 3 & \text{muidu,} \end{cases} \qquad \text{iga } n \geqslant 0 \text{ korral.}$$

Leidke kõik a_0 väärtused, mille korral leidub selline A, et $a_n = A$ lõpmatult paljude n väärtuste korral.

Ülesanne 2. Olgu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulk. Leida kõik sellised funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et kõigi reaalarvude x ja y korral

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy).$$

Ülesanne 3. Jahimees ja nähtamatu jänes mängivad tasandil järgmist mängu. Jänese alguspunkt A_0 ja jahimehe alguspunkt B_0 on samad. Pärast $n-1$ käiku on jänes punktis A_{n-1} ja jahimees on punktis B_{n-1}. Järgmisel, n-ndal käigul toimub üksteise järel kolm asja.

(i) Jänes liigub nähtamatult punkti A_n, nii et punktide A_{n-1} ja A_n vaheline kaugus on täpselt 1.

(ii) Jälitusseade näitab jahimehele punkti P_n. On teada, et punktide P_n ja A_n vaheline kaugus pole rohkem kui 1.

(iii) Jahimees liigub nähtavalt punkti B_n, nii et punktide B_{n-1} ja B_n vaheline kaugus on täpselt 1.

Kas jahimees saab valida oma käigud nii, et ükskõik kuidas jänes liigub ja ükskõik milliseid punkte näitab jälitusseade, on tema kaugus jänesest pärast 10^9 käiku mitte rohkem kui 100?

Aega: 4 tundi ja 30 minutit
Iga ülesanne annab 7 punkti

Kolmapäev, 19. juuli 2017

Ülesanne 4. Olgu R ja S erinevad punktid ringjoonel Ω, nii et RS ei ole selle ringjoone diameeter. Olgu ℓ ringjoone Ω puutuja punktis R. Olgu punkt T selline, et S on lõigu RT keskpunkt. Ringjoone Ω lühemal kaarel RS on valitud punkt J nii, et kolmnurga JST ümberringjoon Γ lõikub sirgega ℓ kahes erinevas punktis. Olgu A ringjoone Γ ja sirge ℓ see lõikepunkt, mis asub lähemal punktile R. Olgu sirge AJ ja ringjoone Ω teine lõikepunkt K. Näidata, et sirge KT on ringjoone Γ puutuja.

Ülesanne 5. Olgu antud täisarv $N \geqslant 2$. Rivis seisab $N(N+1)$ jalgpallimängijat, kõik erinevate pikkustega. Alex tahab rivist eemaldada $N(N-1)$ mängijat, nii et järelejäänud $2N$ mängijast koosnevas rivis kehtivad järgmised N tingimust:

(1) kahe pikima mängija vahel pole ühtki teist mängijat,

(2) pikkuselt kolmanda ja neljanda mängija vahel pole ühtki teist mängijat,

$\vdots$

(N) kahe lühima mängija vahel pole ühtki teist mängijat.

Näidata, et see on alati võimalik.

Ülesanne 6. Järjestatud täisarvude paari (x, y) nimetame *lihtpunktiks*, kui arvude x ja y suurim ühistegur on 1. Olgu S mingi lihtpunktide lõplik hulk. Näidata, et leidub positiivne täisarv n ja täisarvud a_0, a_1, $\ldots$, a_n nii, et iga $(x, y) \in S$ korral

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$