Esmaspäev, 11. juuli 2016

Ülesanne 1. Kolmnurgal BCF on täisnurk tipus B. Olgu A selline punkt sirgel CF, et $|FA| = |FB|$ ja F asub punktide A ja C vahel. Punkt D valitakse nii, et $|DA| = |DC|$ ja AC on nurga DAB poolitaja. Punkt E valitakse nii, et $|EA| = |ED|$ ja AD on nurga EAC poolitaja. Olgu M lõigu CF keskpunkt. Olgu X selline punkt, et $AMXE$ on rööpkülik (kus $AM \parallel EX$ ja $AE \parallel MX$). Tõesta, et sirged BD, FX ja ME lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 2. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille jaoks saab tabeli $n \times n$ iga lahtri täita ühega tähtedest I, M ja O järgmisel viisil:

- igas reas ja igas veerus on üks kolmandik lahtritest I, üks kolmandik M ning üks kolmandik O; ja
- igas diagonaalis, mille lahtrite arv on kolme kordne, on üks kolmandik lahtritest I, üks kolmandik M ning üks kolmandik O.

Märkus: Tabeli $n \times n$ kõik read ja kõik veerud on nummerdatud arvudega 1 kuni n loomulikul viisil. Seega igale lahtrile on seatud vastavusse positiivsete täisarvude paar (i, j), kus $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Kui $n > 1$, siis tabelil on $4n - 2$ *diagonaali*, mis on kahte tüüpi. Esimest tüüpi diagonaal koosneb kõigist lahtritest (i, j), mille jaoks on $i + j$ konstantne; teist tüüpi diagonaal koosneb kõigist lahtritest (i, j), mille jaoks on $i - j$ konstantne.

Ülesanne 3. Olgu $P = A_1A_2 \ldots A_k$ kumer hulknurk tasandil. Tippudel A_1, A_2, $\ldots$, A_k on täisarvulised koordinaadid ning nad asetsevad ringjoonel. Olgu S hulknurga P pindala. Paaritu positiivne täisarv n on selline, et P külgede pikkuste ruudud on täisarvud, mis jaguvad n-ga. Tõesta, et $2S$ on täisarv, mis jagub n-ga.

Aeg: 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti

Teisipäev, 12. juuli 2016

Ülesanne 4. Positiivsete täisarvude hulka kutsutakse *aromaatseks*, kui ta koosneb vähemalt kahest elemendist ning igal tema elemendil leidub ühine algarvuline tegur vähemalt ühe teise elemendiga. Olgu $P(n) = n^2 + n + 1$. Mis on positiivse täisarvu b vähim võimalik väärtus, mille korral leidub mittenegatiivne täisarv a nii, et hulk

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

on aromaatne?

Ülesanne 5. Tahvlile on kirjutatud võrrand

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

mille kummalgi pool on 2016 lineaarset tegurit. Mis on vähim võimalik k väärtus, mille korral saab neist 4032 lineaarsest tegurist kustutada täpselt k nii, et kummalegi poolele jääb alles vähemalt üks tegur ning tekkival võrrandil puuduvad reaalarvulised lahendid?

Ülesanne 6. Tasandil on $n \geqslant 2$ sirglõiku, millest iga kaks lõikuvad sisepunktides, kuid ükski kolmik ei lõiku ühes punktis. Joosepil tuleb valida iga sirglõigu üks otspunkt ning paigutada sinna konn, näoga teise otspunkti poole. Seejärel ta plaksutab käsi $n-1$ korda. Iga kord kui ta plaksutab, hüppab iga konn koheselt edasi järgmisse lõikepunkti enda lõigul. Konnad ei muuda kunagi oma hüpete suunda. Joosep soovib paigutada konnad sellisel viisil, et ükski kaks neist ei satu kunagi samal hetkel samasse lõikepunkti.

(a) Tõesta, et Joosep saab alati täita oma soovi, kui n on paaritu.

(b) Tõesta, et Joosep ei saa kunagi täita oma soovi, kui n on paaris.

Aeg: 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti