

Teisipäev, 8. juuli 2014

Ülesanne 1. Olgu $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ positiivsete täisarvude lõpmatu jada. Tõesta, et leidub täpselt üks täisarv $n \geq 1$, mille korral

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Ülesanne 2. Olgu $n \geq 2$ täisarv. Vaatleme $n \times n$ malelauda, mis koosneb n^2 ühikruudust. Seis n vankriga malelaul on *rahulik*, kui igas reas ja igas veerus asub täpselt üks vanker. Leia suurim niisugune positiivne täisarv k , et iga rahuliku n vankriga seisu korral leidub $k \times k$ ruut, mille k^2 ühikruudust ühelgi pole vankrit.

Ülesanne 3. Kumeras nelinurgas $ABCD$ kehtib $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Olgu H punktist A sirgele BD tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Punktid S ja T vastavalt külgedel AB ja AD on sellised, et H asub kolmnurga SCT sees ning

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Tõesta, et sirge BD puutub kolmnurga TSH ümberringjoont.

Kolmapäev, 9. juuli 2014

Ülesanne 4. Teravnurkse kolmnurga ABC küljel BC asuvad sellised punktid P ja Q , et $\angle PAB = \angle BCA$ ja $\angle CAQ = \angle ABC$. Punktid M ja N vastavalt sirgetel AP ja AQ on sellised, et P on lõigu AM keskpunkt ja Q on lõigu AN keskpunkt. Tõesta, et sirged BM ja CN lõikuvad kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Ülesanne 5. Iga positiivse täisarvu n jaoks emiteerib Kaplinna Pank münte nominaaliga $\frac{1}{n}$. Tõesta, et iga selliste (mitte tingimata erineva nominaaliga) müntide lõpliku kogumi, mille koguväärtus on ülimalt $99 + \frac{1}{2}$, saab jaotada 100 või vähemaks rühmaks, kus iga rühma koguväärtus on ülimalt 1.

Ülesanne 6. Tasandi sirgete hulk on *üldasendis*, kui ükski kaks sirget pole paralleelsed ega ükski kolm lõiku samas punktis. Üldasendis sirgete hulk jaotab tasandi piirkondadeks, millest mõnede pindala on lõplik; nimetame neid selle sirgete hulga *lõplikeks piirkondadeks*. Tõesta, et iga küllalt suure n korral on igast üldasendis n sirgest vähemalt \sqrt{n} võimalik värvida siniseks selliselt, et ühelgi selle sirgete hulga lõplikul piirkonnal ei oleks rajajoon üleni sinine.

Märkus. Lahendused, kus \sqrt{n} asemel saadakse $c\sqrt{n}$, hinnatakse sõltuvalt konstandi c väärtusest.