Teisipäev, 23. juuli 2013

Ülesanne 1. Näidata, et iga positiivsete täisarvude paari k ja n korral leidub k positiivset täisarvu $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (mitte tingimata erinevat) nii, et

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Ülesanne 2. Nimetame 4027 punkti paigutust tasandil *Kolumbia paigutuseks*, kui ta koosneb 2013 punasest ja 2014 sinisest punktist, nii et mitte mingid kolm punkti ei asu ühel sirgel. Vaatleme sirgete hulki, mis jagavad tasandi osadeks. Sirgete hulka nimetame *heaks* mingi Kolumbia paigutuse jaoks, kui järgmised kaks tingimust on täidetud:

- mitte ükski sirge ei läbi ühtki selle paigutuse punkti;
- mitte ükski tasandi osa ei sisalda mõlemat värvi punkte.

Leida vähim selline k väärtus, et iga 4027 punkti Kolumbia paigutuse korral leidub hea sirgete hulk, mis sisaldab k sirget.

Ülesanne 3. Puutugu kolmnurga ABC tipu A vastas asuv külgringjoon külge BC punktis A_1. Defineerime samamoodi punktid B_1 küljel CA ja C_1 küljel AB, kasutades vastavalt külgringjooni tippude B ja C vastas. Asugu kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümberringjoone keskpunkt kolmnurga ABC ümberringjoonel. Näidata, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

Kolmnurga ABC tipu A vastas asuvaks külgringjooneks *nimetatakse ringjoont, mis puutub külge BC, kiirt AB teisel pool tippu B ja kiirt AC teisel pool tippu C. Samamoodi on defineeritud tippude B ja C vastas asuvad külgringjooned.*

Aeg: 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti

Kolmapäev, 24. juuli 2013

Ülesanne 4. Olgu teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H ning olgu küljel BC valitud punkt W, mis ei lange kokku punktidega B ega C. Olgu punktid M ja N vastavalt tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Olgu ω_1 kolmnurga BWN ümberringjoon ning olgu X selline ringjoone ω_1 punkt, et WX on ω_1 diameeter. Samamoodi olgu ω_2 kolmnurga CWM ümberringjoon ning olgu Y selline ringjoone ω_2 punkt, et WY on ω_2 diameeter. Näidata, et punktid X, Y ja H asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 5. Olgu $\mathbb{Q}_{>0}$ positiivsete ratsionaalarvude hulk.Olgu $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ funktsioon, mis rahuldab järgmisi kolme tingimust:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ iga $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ korral;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ iga $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ korral;

(iii) leidub selline ratsionaalarv $a > 1$, et $f(a) = a$.

Näidata, et $f(x) = x$ iga $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ korral.

Ülesanne 6. Olgu $n \geq 3$ täisarv ning olgu ringjoonel märgitud võrdsete vahedega $n+1$ punkti.Vaatleme kõiki nende punktide tähistusi numbritega $0, 1, \ldots, n$ nii, et iga tähist kasutatakse täpselt üks kord; kahte sellist tähistust loeme samaks, kui üks on saadud teisest ringi pööramise teel. Tähistust nimetame *kauniks*, kui iga nelja tähise $a < b < c < d$ korral, kus $a + d = b + c$, kõõl, mis ühendab punkte tähistega a ja d, ei lõiku kõõluga, mis ühendab punkte tähistega b ja c.

Olgu M kaunite tähistuste arv ning olgu N selliste positiivsete täisarvude järjestatud paaride (x, y) arv, mis rahuldavad $x + y \leq n$ ja $\text{SÜT}(x, y) = 1$. Näidata, et

$$M = N + 1.$$

Aeg: 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti