

Teisipäev, 23. juuli 2013

**Ülesanne 1.** Näidata, et iga positiivsete täisarvude paari  $k$  ja  $n$  korral leidub  $k$  positiivset täisarvu  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (mitte tingimata erinevat) nii, et

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

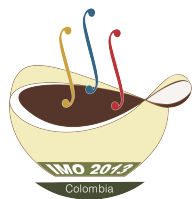
**Ülesanne 2.** Nimetame 4027 punkti paigutust tasandil *Kolumbia paigutuseks*, kui ta koosneb 2013 punasest ja 2014 sinisest punktist, nii et mitte mingid kolm punkti ei asu ühel sirgel. Vaatleme sirgete hulki, mis jagavad tasandi osadeks. Sirgete hulka nimetame *heaks* mingi Kolumbia paigutuse jaoks, kui järgmised kaks tingimust on täidetud:

- mitte ükski sirge ei läbi ühtki selle paigutuse punkti;
- mitte ükski tasandi osa ei sisalda mõlemat värvi punkte.

Leida vähim selline  $k$  väärtus, et iga 4027 punkti Kolumbia paigutuse korral leidub hea sirgete hulk, mis sisaldab  $k$  sirget.

**Ülesanne 3.** Puutugu kolmnurga  $ABC$  tipu  $A$  vastas asuv külgringjoon külge  $BC$  punktis  $A_1$ . Defineerime samamoodi punktid  $B_1$  küljel  $CA$  ja  $C_1$  küljel  $AB$ , kasutades vastavalt külgringjooni tippude  $B$  ja  $C$  vastas. Asugu kolmnurga  $A_1B_1C_1$  ümberringjoone keskpunkt kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel. Näidata, et kolmnurk  $ABC$  on täisnurkne.

*Kolmnurga  $ABC$  tipu  $A$  vastas asuvaks külgringjooneks nimetatakse ringjoont, mis puutub külge  $BC$ , kiirt  $AB$  teisel pool tippu  $B$  ja kiirt  $AC$  teisel pool tippu  $C$ . Samamoodi on defineeritud tippude  $B$  ja  $C$  vastas asuvad külgringjooned.*



Kolmapäev, 24. juuli 2013

**Ülesanne 4.** Olgu teravnurkse kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt  $H$  ning olgu küljel  $BC$  valitud punkt  $W$ , mis ei lange kokku punktidega  $B$  ega  $C$ . Olgu punktid  $M$  ja  $N$  vastavalt tippudest  $B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste aluspunktid. Olgu  $\omega_1$  kolmnurga  $BWN$  ümberringjoon ning olgu  $X$  selline ringjoone  $\omega_1$  punkt, et  $WX$  on  $\omega_1$  diameeter. Samamoodi olgu  $\omega_2$  kolmnurga  $CWM$  ümberringjoon ning olgu  $Y$  selline ringjoone  $\omega_2$  punkt, et  $WY$  on  $\omega_2$  diameeter. Näidata, et punktid  $X$ ,  $Y$  ja  $H$  asuvad ühel sirgel.

**Ülesanne 5.** Olgu  $\mathbb{Q}_{>0}$  positiivsete ratsionaalarvude hulk. Olgu  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  funktsioon, mis rahuldab järgmisi kolme tingimust:

- (i)  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  iga  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  korral;
- (ii)  $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$  iga  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  korral;
- (iii) leidub selline ratsionaalarv  $a > 1$ , et  $f(a) = a$ .

Näidata, et  $f(x) = x$  iga  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$  korral.

**Ülesanne 6.** Olgu  $n \geq 3$  täisarv ning olgu ringjoonel märgitud võrdsete vahedega  $n+1$  punkti. Vaatleme kõiki nende punktide tähistusi numbritega  $0, 1, \dots, n$  nii, et iga tähist kasutatakse täpselt üks kord; kahte sellist tähistust loeme samaks, kui üks on saadud teisest ringi pööramise teel. Tähistust nimetame *kauniks*, kui iga nelja tähise  $a < b < c < d$  korral, kus  $a + d = b + c$ , kõõl, mis ühendab punkte tähistega  $a$  ja  $d$ , ei lõiku kõõluga, mis ühendab punkte tähistega  $b$  ja  $c$ .

Olgu  $M$  kaunite tähistuste arv ning olgu  $N$  selliste positiivsete täisarvude järjestatud paaride  $(x, y)$  arv, mis rahuldavad  $x + y \leq n$  ja  $\text{SÜT}(x, y) = 1$ . Näidata, et

$$M = N + 1.$$