Teisipäev, 10. juuli 2012

Ülesanne 1. Kolmnurga ABC tipu A vastas asuva külgringjoone keskpunkt on J. See külgringjoon puutub külge BC punktis M ja sirgeid AB ja AC vastavalt punktides K ja L. Sirged LM ja BJ lõikuvad punktis F, sirged KM ja CJ aga lõikuvad punktis G. Olgu S sirgete AF ja BC lõikepunkt ning olgu T sirgete AG ja BC lõikepunkt.

Tõesta, et M on lõigu ST keskpunkt.

(Kolmnurga ABC tipu A vastas asuv *külgringjoon* on ringjoon, mis puutub lõiku BC, kiirt AB tagapool tippu B ja kiirt AC tagapool tippu C.)

Ülesanne 2. Olgu $n \geqslant 3$ täisarv ja olgu $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Tõesta, et

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Ülesanne 3. *Valetaja ja arvaja mäng* on kahe isiku A ja B vaheline mäng. Reeglid sõltuvad kahest positiivsest täisarvust k ja n, mis on mõlemale mängijale teada.

Mängu algul valib A täisarvud x ja N, kus $1 \leqslant x \leqslant N$. Mängija A hoiab x salajas ja teatab N õigesti mängijale B. Mängija B püüab seejärel saada infot x kohta, küsides mängijalt A küsimusi; igas küsimuses määrab B suvalise positiivsete täisarvude hulga S (see võib olla ka mõnes varasemas küsimuses määratud hulk) ja küsib A käest, kas x kuulub hulka S. Mängija B võib küsida niipalju selliseid küsimusi kui tahab. Iga küsimuse järel peab mängija A kohe vastama kas "jah" või "ei", kuid ta tohib valetada niipalju kordi kui tahab; ainus kitsendus on, et iga $k + 1$ järjestikuse vastuse seas peab olema vähemalt üks tõene.

Kui B on küsinud niipalju küsimusi kui tahab, peab ta määrama ülimalt n positiivsest täisarvust koosneva hulga X. Kui x kuulub hulka X, siis B võidab; vastasel korral ta kaotab. Tõesta, et:

1. kui $n \geqslant 2^k$, siis mängijal B leidub võitev strateegia;
2. iga küllalt suure k korral leidub selline täisarv $n \geqslant 1{,}99^k$, et mängijal B ei leidu võitvat strateegiat.

Aega 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti

Kolmapäev, 11. juuli 2012

Ülesanne 4. Leia kõik sellised funktsioonid $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, et kõikide tingimust $a+b+c=0$ rahuldavate täisarvude a, b, c korral kehtib võrdus

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Siin $\mathbb{Z}$ tähistab kõigi täisarvude hulka.)

Ülesanne 5. Olgu ABC kolmnurk, kus $\angle BCA = 90°$, ja olgu D tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt. Olgu X punkt lõigu CD sisepiirkonnas. Olgu K selline punkt lõigul AX, et $|BK| = |BC|$. Samuti olgu L selline punkt lõigul BX, et $|AL| = |AC|$. Olgu M sirgete AL ja BK lõikepunkt.

Tõesta, et $|MK| = |ML|$.

Ülesanne 6. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille jaoks leiduvad sellised mittenegatiivsed täisarvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Aega 4 tundi 30 minutit
Iga ülesanne on väärt 7 punkti