Esmaspäev, 18. juuli 2011

Ülesanne 1. Olgu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ neljast erinevast positiivsest täisarvust koosnev hulk.Tähistame summa $a_1+a_2+a_3+a_4$ tähega s_A. Olgu n_A selliste paaride (i, j), kus $1 \leq i < j \leq 4$, hulk, mille puhul $a_i + a_j$ jagab arvu s_A. Leida kõik neljast erinevast positiivsest täisarvust koosnevad hulgad A, mille korral n_A on maksimaalne võimalik.

Ülesanne 2. Olgu $\mathcal{S}$ lõplik punktihulk tasandil, mis sisaldab vähemalt kahte punkti. Eeldame, et mitte mingid kolm hulga $\mathcal{S}$ punkti ei asu ühel sirgel. Nimetame *tuulikuks* protsessi, mis algab joonega ℓ, mis läbib täpselt ühte hulga $\mathcal{S}$ punkti P. Joon ℓ pöörleb kellaosuti liikumise suunas ümber *keskpunkti* P hetkeni, mil ta jõuab mingi teise hulga $\mathcal{S}$ punktini. See punkt Q võetakse uueks keskpunktiks ja joon jätkab pöörlemist kellaosuti liikumise suunas ümber punkti Q kuni ta jõuab järgmise hulga $\mathcal{S}$ punktini. See protsess jätkub lõpmatult.
Näidata, et saab valida punkti P hulgast $\mathcal{S}$ ja joone ℓ läbi punkti P nii, et vastav tuulik kasutab iga hulga $\mathcal{S}$ punkti keskpunktina lõpmatult palju kordi.

Ülesanne 3. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaalarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis rahuldab võrratust

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kõigi reaalarvude x ja y korral. Näidata, et $f(x) = 0$ kõigi $x \leq 0$ korral.

Aeg: 4 tundi ja 30 minutit
Iga ülesanne annab 7 punkti

Teisipäev, 19. juuli 2011

Ülesanne 4. Olgu $n > 0$ täisarv. Meil on kahe kaalukausiga kaal ja n kaaluvihti massidega 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Me peame asetama kõik n kaaluvihti ükshaaval kaalukaussidele nii, et parem kaalukauss ei kaaluks kunagi vasakut üles. Igal sammul valime ühe kaaluvihtidest, mis pole veel kaalul ning asetame selle kas vasakule või paremale kaalukausile, kuni kõik kaaluvihid on kaalul.
Mitmel erineval viisil on võimalik seda teha?

Ülesanne 5. Olgu f täisarvude hulgal määratud funktsioon, mille väärtused on positiivsed täisarvud. Eeldame, et iga kahe täisarvu m ja n korral vahe $f(m) - f(n)$ jagub arvuga $f(m - n)$. Tõestada, et kõigi täisarvude m ja n korral, mille puhul $f(m) \leq f(n)$, arv $f(n)$ jagub arvuga $f(m)$.

Ülesanne 6. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ümberringjoonega Γ. Olgu ℓ ringjoone Γ puutuja, ning olgu ℓ_a, ℓ_b and ℓ_c sirged, mis on sümmeetrilised sirgega ℓ vastavalt sirgete BC, CA ja AB suhtes. Tõestada, et joontega ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määratud kolmnurga ümberringjoon puutub ringjoont Γ.

Aeg: 4 tundi ja 30 minutit
Iga ülesanne annab 7 punkti