Kolmapäev, 7. juuli 2010

Ülesanne 1. Leia kõik sellised funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral võrdus

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

kehtib mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks. (Kirjutis $\lfloor z \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu z.)

Ülesanne 2. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning Γ selle kolmnurga ümberringjoon. Olgu D sirge AI ja ringjoone Γ teine lõikepunkt. Olgu punkt E valitud kaarel BDC ning punkt F valitud küljel BC nii, et

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Olgu G lõigu IF keskpunkt. Tõesta, et sirged DG ja EI lõikuvad punktis, mis asub ringjoonel Γ.

Ülesanne 3. Olgu $\mathbb{N}$ kõigi positiivsete täisarvude hulk. Leia kõik sellised funktsioonid $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mille korral arv

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

on täisruut mistahes $m, n \in \mathbb{N}$ jaoks.

Lahendamisaeg: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.

Neljapäev, 8. juuli 2010

Ülesanne 4. Olgu P mingi punkt kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Sirgete AP, BP ja CP teised lõikepunktid kolmnurga ABC ümberringjoonega Γ olgu vastavalt K, L ja M. Ringjoonele Γ punktist C tõmmatud puutuja lõikugu sirgega AB punktis S. Tõesta, et kui $|SC| = |SP|$, siis $|MK| = |ML|$.

Ülesanne 5. Alguses on kuuest kastist $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ igaühes üks münt. On lubatud läbi viia järgmisi kaht tüüpi operatsioone.

Tüüp 1: Valime mittetühja kasti B_j, kus $1 \leqslant j \leqslant 5$. Eemaldame kastist B_j ühe mündi ning lisame kasti B_{j+1} kaks münti.

Tüüp 2: Valime mittetühja kasti B_k, kus $1 \leqslant k \leqslant 4$. Eemaldame kastist B_k ühe mündi ning vahetame (võib-olla tühja) kasti B_{k+1} ja (võib-olla tühja) kasti B_{k+2} sisud.

Kas leidub selliste operatsioonide lõplik jada, mille tulemusena kastid B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 on tühjad ning kastis B_6 on täpselt $2010^{2010^{2010}}$ münti? (Märgime, et $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Ülesanne 6. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiivsete reaalarvude jada. Kehtigu mingi positiivse täisarvu s korral kõigi $n > s$ jaoks tingimus

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

Tõesta, et leiduvad sellised positiivsed täisarvud ℓ ja N, et $\ell \leqslant s$ ning $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ kõigi $n \geqslant N$ korral.

Lahendamisaeg: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne maksab 7 punkti.