2009.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bremenis (Saksamaa), 15.–16. juulil 2009

Esimene päev

1. Olgu n positiivne täisarv ja olgu $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 2)$ sellised erinevad täisarvud hulgast $\{1, \ldots, n\}$, et arv n jagab arvu $a_i(a_{i+1} - 1)$ iga $i = 1, \ldots, k-1$ korral. Tõesta, et arv n ei jaga arvu $a_k(a_1 - 1)$.

2. Olgu ABC kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O. Olgu P ja Q kolmnurga tippudest erinevad punktid vastavalt külgedel CA ja AB. Olgu K, L ja M vastavalt lõikude BP, CQ ja PQ keskpunktid ning olgu Γ ringjoon, mis läbib punkte K, L ja M. Oletame, et sirge PQ puutub ringjoont Γ. Tõesta, et $|OP| = |OQ|$.

3. Olgu $s_1, s_2, s_3, \ldots$ selline rangelt kasvav positiivsete täisarvude jada, et jadad

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{ja} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

on mõlemad aritmeetilised. Tõesta, et jada $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on ise aritmeetiline.

2009.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bremenis (Saksamaa), 15.–16. juulil 2009

Teine päev

4. Olgu ABC kolmnurk, kus $|AB| = |AC|$. Nurkade CAB ja ABC poolitajad lõikavad külgi BC ja CA vastavalt punktides D ja E. Olgu K kolmnurga ADC siseringjoone keskpunkt. Oletame, et $\angle BEK = 45^\circ$. Leia kõik võimalused, milline saab olla $\angle CAB$.

5. Leia kõik sellised funktsioonid f positiivsete täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral leidub kolmnurk küljepikkustega

   a, $f(b)$ ja $f(b + f(a) - 1)$.

6. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erinevad positiivsed täisarvud ja olgu M hulk $n - 1$ positiivsest täisarvust, kuhu ei kuulu arv $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Rohutirts alustab hüppamist piki arvtelge punktist 0 ja teeb n hüpet paremale pikkustega $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mingis järjekorras. Tõesta, et järjekorra saab valida nii, et rohutirts ei maandu kunagi hulka M kuuluvas punktis.