

2008.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Madridis (Hispaania), 16.–17. juulil 2008

Esimene päev

1. Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Punkti H läbiv ringjoon keskpunktiga külje BC keskpunktis lõikab sirget BC punktides A_1 ja A_2 . Samuti lõikab punkti H läbiv ringjoon keskpunktiga külje CA keskpunktis sirget CA punktides B_1 ja B_2 ning punkti H läbiv ringjoon keskpunktiga külje AB keskpunktis sirget AB punktides C_1 ja C_2 . Näita, et $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ asuvad ühel ringjoonel.

2. (a) Tõesta, et

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kõigi 1-st erinevate reaalarvude x, y, z korral, mis rahuldavad tingimust $xyz = 1$.

(b) Tõesta, et selles võrratuses kehtib võrdus lõpmata paljude 1-st erinevate ratsionaalarvude kolmikute (x, y, z) korral, mis rahuldavad tingimust $xyz = 1$.

3. Tõesta, et on lõpmata palju positiivseid täisarve n , mille korral arvul $n^2 + 1$ leidub algtegur, mis on suurem kui $2n + \sqrt{2n}$.

2008.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Madridis (Hispaania), 16.–17. juulil 2008

Teine päev

4. Leia kõik sellised funktsioonid $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (st funktsioonid f positiivsetest reaalarvudest positiivsetesse reaalarvudesse), et kõigi tingimust $wx = yz$ rahuldavate positiivsete reaalarvude w, x, y, z korral

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

5. Olgu n ja k sellised positiivsed täisarvud, et $k \geq n$ ja $k - n$ on paaris. On antud $2n$ lampi, mis on tähistatud arvudega $1, 2, \dots, 2n$. Iga lamp saab kas *põleda* või *mitte põleda*. Algul ükski lamp ei põle. Ühe *sammuga* saab täpselt ühe lambi olekut muuta (põleva lambi kustutada või mitte põleva lambi põlema panna).

Olgu N selliste k -sammuliste lülitusprotsesside arv, mille tulemusena lambid 1 kuni n kõik põlevad ja lambid $n + 1$ kuni $2n$ ükski ei põle.

Olgu M selliste k -sammuliste lülitusprotsesside arv, mille tulemusena lambid 1 kuni n kõik põlevad ja lambid $n + 1$ kuni $2n$ ükski ei põle ning mille käigus ühtki lampidest $n + 1$ kuni $2n$ pole kordagi põlema pandudki.

Leia suhe $\frac{N}{M}$.

6. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk, kus $|BA| \neq |BC|$. Olgu ω_1 ja ω_2 vastavalt kolmnurkade ABC ja ADC siseringjooned. On teada, et leidub ringjoon ω , mida puutub nii kiir BA tagapool punkti A kui ka kiir BC tagapool punkti C ning mida puutuvad ka sirged AD ja CD . Tõesta, et ringjoonte ω_1 ja ω_2 välised ühised puutujad lõikuvad ringjoonel ω .