

2007.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Hanois (Vietnam), 25.–26. juulil 2007

Esimene päev

1. On antud reaalarvud a_1, a_2, \dots, a_n . Iga i ($1 \leq i \leq n$) korral defineerime

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

ja olgu

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

- a) Tõesta, et suvaliste reaalarvude $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ korral kehtib võrratus

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

- b) Näita, et leiduvad reaalarvud $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, mille korral võrratuses (*) kehtib võrdus.

2. On antud viis punkti A, B, C, D ja E nii, et $ABCD$ on rööpkülik ja $BCED$ kõõlnelinurk. Sirge ℓ läbib punkti A ning lõikab lõigu DC sisepiirkonda punktis F ja sirget BC punktis G . Lisaks on teada, et $|EF| = |EG| = |EC|$. Tõesta, et ℓ on nurga DAB poolitaja.

3. Mõned matemaatikavõistlusest osavõtjad on omavahel sõbrad; sõprus on alati vastastikune. Võistlejate mingit rühma nimetame *klikiks*, kui suvalised kaks võistlejat selles on sõbrad. (Muuhulgas on klikid kõik vähem kui kahest võistlejast moodustatud rühmad.) Klikki liikmete arvu nimetame selle klikki *suuruseks*.

On teada, et kogu võistluse suurima klikki suurus on paarisarv. Tõesta, et võistlejad saab niimoodi kahte ruumi jagada, et mõlema ruumi suurimad klikid on võrdse suurusega.

2007.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Hanoi (Vietnam), 25.–26. juulil 2007

Teine päev

4. Kolmnurga ABC nurga BCA poolitaja lõikab kolmnurga ümberingjoont teistkordselt punktis R ning külgede BC ja AC keskristsirgeid vastavalt punktides P ja Q . Külgede BC ja AC keskpunktid on vastavalt K ja L . Tõesta, et kolmnurkade RPK ja RQL pindalad on võrdsed.
5. Olgu a ja b positiivsed täisarvud. Tõesta, et kui arv $(4a^2 - 1)^2$ jagub arvuga $4ab - 1$, siis $a = b$.
6. Olgu n positiivne täisarv. Vaatleme $(n+1)^3 - 1$ punktist koosnevat hulka

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

kolmemõõtmelises ruumis. Leia vähim võimalik niisuguste tasandite arv, millede ühend sisaldab kõik hulga S punktid, kuid mitte punkti $(0, 0, 0)$.