2006.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ljubljanas (Sloveenia), 12.–13. juulil 2006

Esimene päev

1. Olgu ABC kolmnurk ja I tema siseringjoone keskpunkt. Punkt P selle kolmnurga sees rahuldab tingimust

   $$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

   Näita, et $|AP| \geq |AI|$, kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $P = I$.

2. Olgu P korrapärane 2006-nurk. P diagonaali nimetame “heaks”, kui tema otspunktid jaotavad P rajajoone kaheks osaks, mis kumbki koosneb paaritust arvust P külgedest. P külgi nimetame samuti “headeks”.

   Vaatleme P jaotusi kolmnurkadeks 2003 sellise diagonaaliga, millest ühelgi kahel ei ole P sees ühist punkti. Leia suurim kahe “hea” küljega võrdhaarsete kolmnurkade arv, mis saab sellises jaotuses esineda.

3. Leia vähim selline reaalarv M, et võrratus

   $$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqslant M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

   kehtib kõigi reaalarvude a, b ja c korral.

2006.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ljubljanas (Sloveenia), 12.–13. juulil 2006

Teine päev

4. Leia kõik sellised täisarvupaarid (x, y), et

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom astmega $n > 1$ ja olgu k positiivne täisarv. Vaatleme polünoomi $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kus P esineb k korda. Tõesta, et leidub ülimalt n sellist täisarvu t, et $Q(t) = t$.

6. Kumera hulknurga P igale küljele b seame vastavusse suurima pindala, mida omab mõni hulknurgas P sisalduv kolmnurk, mille üks külg on b. Näita, et P külgedele vastavusse seatud pindalade summa on vähemalt kaks korda suurem P pindalast.