

# 2005.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Méridas (Mehhiko), 13.–14. juulil 2005

## Esimene päev

1. Võrdkülgse kolmnurga  $ABC$  külgedel valitakse kuus punkti:  $A_1$  ja  $A_2$  küljel  $BC$ ,  $B_1$  ja  $B_2$  küljel  $CA$  ning  $C_1$  ja  $C_2$  küljel  $AB$ . Need punktid moodustavad kumera kuusnurga  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ , mille küljed on võrdse pikkusega. Tõesta, et sirged  $A_1B_2$ ,  $B_1C_2$  ja  $C_1A_2$  lõikuvad ühes punktis.
2. Täisarvude jadas  $a_1, a_2, \dots$  on lõpmata palju positiivseid ja lõpmata palju negatiivseid liikmeid. Iga positiivse täisarvu  $n$  korral annavad  $a_1, a_2, \dots, a_n$  arvuga  $n$  jagamisel  $n$  erinevat jääki. Tõesta, et iga täisarv esineb selles jadas täpselt üks kord.
3. Olgu  $x$ ,  $y$  ja  $z$  niisugused positiivsed reaalarvud, et  $xyz \geq 1$ . Tõesta, et

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

# 2005.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Méridas (Mehhiko), 13.–14. juulil 2005

## Teine päev

4. Jada  $a_1, a_2, \dots$  on defineeritud seosega

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Leia kõik positiivsed täisarvud, mis on ühistegurita selle jada kõigi liikmetega.

5. Kumera nelinurga  $ABCD$  küljed  $BC$  ja  $AD$  on võrdse pikkusega ning mitteparalleelsed. Külgedel  $BC$  ja  $AD$  valitakse vastavalt sisepunktid  $E$  ja  $F$  nii, et  $|BE| = |DF|$ . Sirged  $AC$  ja  $BD$  lõikuvad punktis  $P$ , sirged  $BD$  ja  $EF$  lõikuvad punktis  $Q$  ning sirged  $EF$  ja  $AC$  lõikuvad punktis  $R$ . Vaatleme kõiki kolmnurki  $PQR$ , mis tekivad punktide  $E$  ja  $F$  erinevate võimalike valikute korral. Tõesta, et kõigi nende kolmnurkade ümberringjoontel on peale  $P$  veel üks ühine punkt.
6. Matemaatikavõistlusel anti õpilastele 6 ülesannet. Iga ülesannetepaari lahendas edukalt rohkem kui  $\frac{2}{5}$  võistlejatest, kuid ükski õpilane ei suutnud lahendada kõiki kuut ülesannet. Tõesta, et leidub vähemalt kaks võistlejat, kes mõlemad lahendasid täpselt 5 ülesannet.