2004.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ateenas (Kreeka), 12.–13. juulil 2004

Esimene päev

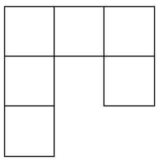
1. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, kus $|AB| \neq |AC|$. Ringjoon diameetriga BC lõikab külgi AB ja AC vastavalt punktides M ja N. Tähistagu O külje BC keskpunkti ning lõikugu nurkade BAC ja MON poolitajad punktis R. Tõesta, et kolmnurkade BMR ja CNR ümberringjoontel on ühine punkt, mis asub küljel BC.

2. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, mis rahuldavad tingimust

   $$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

   mistahes selliste reaalarvude a, b, c korral, kus $ab + bc + ca = 0$.

3. Nimetame *konksuks* joonisel näidatud kuuest ühikruudust koosnevat kujundit

   ning mistahes sellest kujundist pöörete ja peegelduste abil saadavat kujundit.

   Leia kõik $m \times n$ ristkülikud, mida saab konksudega katta nii, et

   - ristkülik on konksudega kaetud tervenisti ja ilma ülekattumisteta;
   - ükski konksu osa ei ulatu ristkülikust väljapoole.

2004.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ateenas (Kreeka), 12.–13. juulil 2004

Teine päev

4. Olgu $n \geqslant 3$ täisarv. Olgu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

   Näita, et mistahes i, j, k korral, kus $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, on t_i, t_j, t_k mingi kolmnurga küljepikkusteks.

5. Kumeras nelinurgas $ABCD$ ei ole diagonaal BD nurga ABC ega nurga CDA poolitajaks. Punkt P paikneb nelinurga $ABCD$ sees ning rahuldab tingimusi

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ja} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

   Tõesta, et $ABCD$ on kõõlnelinurk siis ja ainult siis, kui $|AP| = |CP|$.

6. Nimetame positiivset täisarvu *vahelduvaks*, kui selle kümnendesituse iga kaks järjestikust numbrit on erineva paarsusega.

   Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, mille mingi kordne on vahelduv.