2003.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Tokyos (Jaapan), 13.–14. juulil 2003

Esimene päev

1. Hulga $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ alamhulgas A on täpselt 101 elementi. Tõesta, et hulgas S leiduvad niisugused elemendid $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$, et hulgad

   $$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

   on paarikaupa ühisosata.

2. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

   $$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

   on positiivne täisarv.

3. Kumera kuusnurga iga kaks vastaskülge rahuldavad järgmist tingimust: nende keskpunktide vaheline kaugus võrdub $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ korda nende pikkuste summaga. Tõesta, et selle kuusnurga kõik nurgad on võrdsed.

   (Kumeral kuusnurgal $ABCDEF$ on kolm paari vastaskülgi: AB ja DE, BC ja EF, CD ja FA.)

2003.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Tokyos (Jaapan), 13.–14. juulil 2003

Teine päev

4. On antud kõõlnelinurk $ABCD$. Olgu P, Q ja R punktist D vastavalt sirgetele BC, CA ja AB tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Tõesta, et $|PQ| = |QR|$ parajasti siis, kui nurkade ABC ja ADC poolitajad lõikuvad sirgel AC.

5. On antud positiivne täisarv n ja reaalarvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mille korral $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

   (a) Tõesta võrratus

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leqslant \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 \, .$$

   (b) Tõesta, et võrdus kehtib parajasti siis, kui arvud $x_1, \ldots, x_n$ moodustavad aritmeetilise jada.

6. On antud algarv p. Tõesta, et leidub niisugune algarv q, mille korral ühegi täisarvu n jaoks arv $n^p - p$ ei jagu arvuga q.