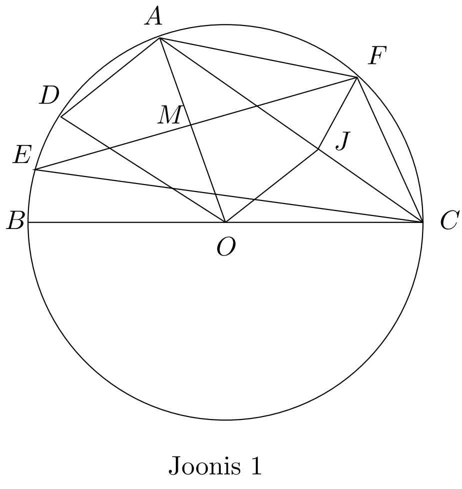
2002.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Olgu a_i nende siniste punktide arv, mille x-koordinaat on i, ja b_i nende siniste punktide arv, mille y-koordinaat on i, kus $i = 0, \ldots, n-1$. Siis erinevate X-hulkade arv on $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ ning erinevate Y-hulkade arv on $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$. Tõestamaks, et $a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$, näitame, et arvud $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ moodustavad arvude $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ mingi ümberjärjestuse.

   Teeme induktsiooni punaste punktide arvu järgi. Kui punaseid punkte ei ole, on tõestatav väide ilmne. Kui punaseid punkte leidub, siis valime nende seast niisuguse punkti koordinaatidega (x, y), mille korral avaldise $x + y$ väärtus on maksimaalne. Siis $a_x = b_y = n - 1 - x - y$. Värvides valitud punase punkti siniseks, saame ülesande tingimusi rahuldava konfiguratsiooni, mille korral punaste punktide arv on väiksem kui esialgses konfiguratsioonis. Induktsiooni eelduse põhjal on arvud $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ (kus b_y on asendatud arvuga $b_y - 1$) arvude $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (kus a_x on asendatud arvuga $a_x - 1$) mingi ümberjärjestus. Kuna $a_x = b_y$, kehtib sama väide ka algsete järjendite $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ ja $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jaoks.



Joonis 1

2. Punkt A on kaare EAF keskpunkt, järelikult poolitab kiir CA nurga ECF. Kuna $|OA| = |OC|$, siis $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACO = \angle OAC$, mistõttu on lõigud OD ja JA paralleelsed ning $ODAJ$ on rööpkülik (vt. joonist 1). Seega $|AJ| = |OD| = |OE| = |AF|$ (sest $OEAF$ kui ristuvate ja teineteist poolitavate diagonaalidega nelinurk on romb). Järelikult

$$\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA = \angle AJF - \angle ECA = \angle AJF - \angle JCF = \\ = \angle JFC \, .$$

Kokkuvõttes poolitab kiir FJ nurga EFC ning J on seega kolmnurga CEF siseringjoone keskpunkt.

3. Olgu m, n sobiv paar; ilmselt $n < m$. Kõigepealt näitame, et polünoom $f(x) = x^m + x - 1$ jagub polünoomiga $g(x) = x^n + x^2 - 1$. Täisarvuliste kordajatega polünoomide vallas jäägiga jagades saame

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \, ,$$

kus $\deg(r) < \deg(g)$. Seega läheneb jääkliige $\frac{r(x)}{g(x)}$ nullile, kui argument x läheneb lõpmatusele, teisalt aga peab selle liikme väärtus lõpmata paljude positiivsete täisarvude korral olema täisarv. Järelikult kehtib võrdus $\frac{r(a)}{g(a)} = 0$ lõpmata paljude positiivsete täisarvude a korral ning seega $r \equiv 0$.

Olgu $m = k + n$. Siis

$$x^m + x - 1 = x^k(x^n + x^2 - 1) + x^k - x^{k+2} + x - 1 \, .$$

Järelikult jagab polünoom $x^n + x^2 - 1$ polünoomi

$$x^k - x^{k+2} + x - 1 = (1 - x)(x^{k+1} + x^k - 1)$$

ning seega ka polünoomi $x^{k+1} + x^k - 1$. Kuna $n \geqslant 3$, siis tähendab see muuhulgas, et $k \geqslant 2$, ning samuti peab kehtima võrratus $k + 1 \geqslant n$.

Funktsioon $g(x) = x^n + x^2 - 1$ on pidev ja kasvab rangelt lõigus $[0, 1]$, kusjuures $g(0) = -1$ ja $g(1) = 1$. Järelikult leidub funktsioonil $g(x)$ sellel lõigul nullkoht α. Kuna polünoom $g(x)$ jagab polünoomi $x^{k+1} + x^k - 1$, siis peab α olema ka polünoomi $x^{k+1}+x^k-1$ juureks. Seega $\alpha^n+\alpha^2=1$ ja $\alpha^{k+1}+\alpha^k=1$. Et $k+1 \geqslant n$, $k \geqslant 2$ ja $\alpha \in [0,1]$, siis kehtib võrratus $\alpha^n+\alpha^2 \geqslant \alpha^{k+1}+\alpha^k$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $k+1=n$ ja $k=2$. Järelikult sobib lahendiks ainult paar $m=5$, $n=3$.

4. (a) Paneme tähele, et kui d on arvu n jagaja, siis on seda ka arv $\dfrac{n}{d}$. Siit saame

$$D=\sum_{1\leqslant i<k} d_i d_{i+1} = n^2 \sum_{1\leqslant i<k} \frac{1}{d_i d_{i+1}} \leqslant n^2 \sum_{1\leqslant i<k}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right) <$$
$$< \frac{n^2}{d_1} = n^2 .$$

(b) Me näitame, et D on arvu n^2 jagaja parajasti siis, kui n on algarv. Kui n on algarv, siis $k=2$ ja $D=n$, mistõttu D on n^2 jagaja.
Olgu nüüd n kordarv ja p tema vähim algtegur. Siis $k>2$ ja $D>d_{k-1}d_k=\dfrac{n^2}{p}$. Kui D oleks arvu n^2 jagaja, peaks seda olema ka arv $\dfrac{n^2}{D}$, kuid ülesande (a)-osa põhjal $1<\dfrac{n^2}{D}<p$, mis on aga võimatu, sest $d_1=1$ ja $d_2=p$.

5. Lihtne on kontrollida, et lahenditeks sobivad funktsioonid $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv \dfrac{1}{2}$ ja $f(x)\equiv x^2$. Nende funktsioonide korral võtavad ülesande võrduse mõlemad pooled vastavalt väärtused 0, 1 ja $(x^2+z^2)(y^2+t^2)$. Tõestame, et rohkem lahendeid ei ole.
Võttes antud võrduses $x=y=z=0$, saame $2f(0)=2f(0)(f(0)+f(t))$. Muuhulgas $2f(0)=4f(0)^2$ ning seega $f(0)=0$ või $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Kui $f(0)=\dfrac{1}{2}$, saame $f(0)+f(t)=1$ iga t korral ja järelikult $f(x)\equiv\dfrac{1}{2}$.
Oletame nüüd et $f(0)=0$. Võttes antud võrduses $z=t=0$, saame $f(xy)=f(x)f(y)$, s.t. funktsioon f on multiplikatiivne. Muuhulgas $f(1)=f(1)^2$, millest $f(1)=0$ või $f(0)=1$. Kui $f(1)=0$, siis $f(x)=f(x\cdot 1)=f(x)f(1)=0$ iga x korral.
Seega võime eeldada, et $f(0)=0$ ja $f(1)=1$. Võttes antud võrduses

$x = 0$ ja $y = t = 1$, saame

$$f(-z) + f(z) = 2f(z) ,$$

seega $f(z) = f(-z)$ iga z korral ning f on paarisfunktsioon. Järelikult piisab tõestada, et $f(x) = x^2$ positiivsete x väärtuste korral. Paneme tähele, et $f(x^2) = f(x)^2 \geqslant 0$ ja tänu f paarsusele kehtib võrratus $f(y) \geqslant 0$ kõigi y väärtuste korral.

Võttes antud võrduses $t = x$ ja $z = y$, saame

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 ,$$

seega $f(x^2 + y^2) \geqslant f(x)^2 = f(x^2)$, mis tähendab, et funktsioon f on mittenegatiivsete argumendi väärtuste korral kasvav.

Võttes antud võrduses $y = z = t = 1$, saame

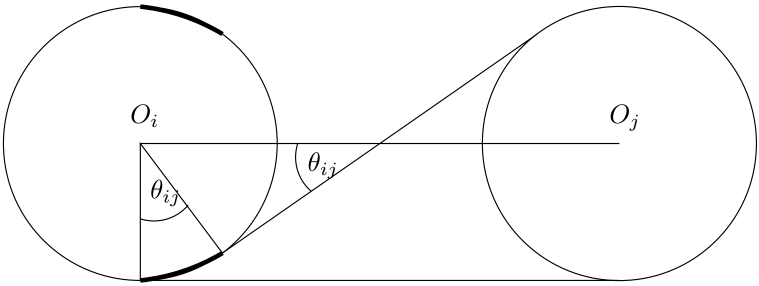
$$f(x - 1) + f(x + 1) = 2(f(x) + 1) .$$

Kui $x = 1$, saame siit $f(2) = 4$, kui $x = 2$, siis $f(3) = 9$ jne. — induktsiooniga n järgi on lihtne tõestada, et $f(n) = n^2$ kõigi naturaalarvude n korral. Kuna f on paarisfunktsioon, kehtib sama väide ka kõigi täisarvude korral ning arvestades funktsiooni f multiplikatiivsust on $f(x) = x^2$ kõigi ratsionaalarvude jaoks.

Näitame lõpuks, et funtsiooni kasvamisest arvkiirel $[0, \infty)$ järeldub võrdus $f(x) = x^2$ samas piirkonnas. Oletame, et $f(x) \neq x^2$ mingi positiivse reaalarvu x korral. Kui $f(x) < x^2$, siis valime ratsionaalarvu a nii, et $x > a > \sqrt{f(x)}$. Siis $f(a) = a^2 > f(x)$, kuid teisest küljest $f(a) \leqslant f(x)$, sest f on kasvav — vastuolu. Samasuguse vastuolu annab ka eeldus $f(x) > x^2$, seega on veelkord funktsiooni f paarsust arvestades ainus võimalus, et $f(x) \equiv x^2$ kogu reaalarvude hulgal.

6. Vaatleme ringjoont Γ_i ning märgime sellel punktid, millest tõmmatud puutuja omab ühiseid punkte mingi teise ringjoonega Γ_j. Need punktid moodustavad kaks kaart võrdse pikkusega θ_{ij} (vt. joonist 2). Seejuures

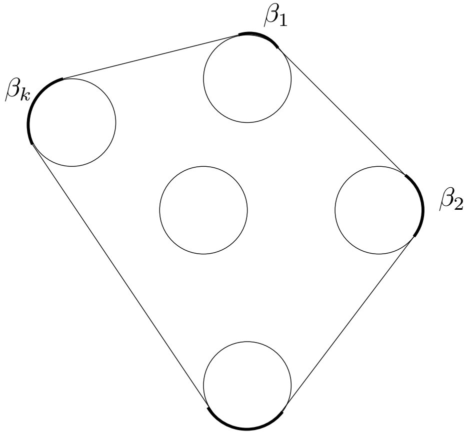
$$\sin \theta_{ij} = \frac{1}{\frac{O_iO_j}{2}} = \frac{2}{O_iO_j} .$$



Joonis 2

Kuna vaadeldavad puutujad lõikavad ülimalt ühte teistest ringjoontest, on ringjoonele Γ_i erinevate ringjoonte Γ_j korral märgitavad kaared ühiste punktideta; olgu α_i nende kaarte pikkuste summa ringjoonel Γ_i, s.t. $\alpha_i = \sum_{j \neq i} 2\theta_{ij}$.

Vaatleme veel antud ringjoonte “kumerat katet” (vt. joonist 3) ning olgu selle kumera katte mingitele ringjoontele kuuluvate kaarte pikkused $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.



Joonis 3

Ülesande tingimuste põhjal ei oma kaared pikkustega β_i ja θ_{ij} ühiseid punkte, seega ei ületa kõigi nende kaarte pikkuste summa antud ringjoonte pikkuste summat:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \leqslant 2n\pi \ .$$

Kuna ilmselt $\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i = 2\pi$, siis

$$\begin{aligned} 2(n-1)\pi &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j \neq i} 2\theta_{ij} = 4 \sum_{i<j} \theta_{ij} \geqslant 4 \sum_{i<j} \sin\theta_{ij} = \\ &= 8 \sum_{i<j} \frac{1}{O_i O_j} \ , \end{aligned}$$

mis on samaväärne tõestatava võrratusega.