2002.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Glasgows (Suurbritannia), 24.–25. juulil 2002

Esimene päev

1. Olgu n positiivne täisarv ning olgu T selliste tasandi punktide $(x,\ y)$ hulk, kus x ja y on mittenegatiivsed täisarvud ning $x+y<n$. Hulga T iga punkt värvitakse punaseks või siniseks nii, et kui punkt (x,y) on punane, siis on samuti punased kõik punktid (x',y') hulgast T, kus $x' \leqslant x$ ja $y' \leqslant y$.

   Nimetame X-hulgaks hulka, mis koosneb n erinevate x-koordinaatidega sinisest punktist, ning Y-hulgaks hulka, mis koosneb n erinevate y-koordinaatidega sinisest punktist.

   Tõesta, et X-hulkade arv on võrdne Y-hulkade arvuga.

2. Olgu O ringjoone Γ keskpunkt ja BC selle ringjoone diameeter. Valime ringjoonel Γ punkti A nii, et $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Olgu D selle kaare AB keskpunkt, mis ei sisalda punkti C. Läbi punkti O paralleelselt sirgega DA tõmmatud sirge lõikab sirget AC punktis J. Lõigu OA keskristsirge lõikab ringjoont Γ punktides E ja F. Tõesta, et J on kolmnurga CEF siseringjoone keskpunkt.

3. Leia kõik täisarvude $m,\ n \geqslant 3$ paarid, mille korral leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve a, et

   $$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

   on täisarv.

2002.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Glasgows (Suurbritannia), 24.–25. juulil 2002

Teine päev

4. Olgu $n > 1$ täisarv, mille positiivsed jagajad on d_1, d_2, $\ldots$, d_k, kusjuures

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n \ .$$

Olgu $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.

(a) Tõesta, et $D < n^2$.

(b) Leia kõik arvud n, mille korral D on arvu n^2 jagaja.

5. Olgu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulk. Leia kõik sellised funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et

$$\big(f(x) + f(z)\big) \cdot \big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

mistahes x, y, z, t korral hulgast $\mathbb{R}$.

6. Olgu Γ_1, Γ_2, $\ldots$, Γ_n (kus $n \geqslant 3$) raadiusega 1 ringjooned tasandil ning olgu nende keskpunktid vastavalt O_1, O_2, $\ldots$, O_n. On teada, et mistahes sirge tasandil omab ühiseid punkte ülimalt kahega neist ringjoontest. Tõesta, et

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4} \ .$$