2001.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

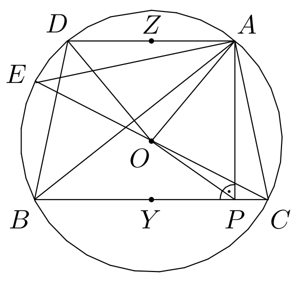
1. Valime punkti D kolmnurga ABC ümberringjoonel nii, et $AD \parallel BC$ (vt. joonist 1). Siis

$$\angle ABD = \angle CBD - \angle ABC = \angle BCA - \angle ABC \geqslant 30^\circ$$

ning seega $\angle AOD \geqslant 60^\circ$. Olgu Z lõigu AD keskpunkt ja Y lõigu BC keskpunkt. Siis $|YP| = |AZ| \geqslant \frac{R}{2}$, kus R on kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Et kolmnurk ABC on teravnurkne, siis $O \neq Y$ ja $|OP| > |YP| \leqslant \frac{R}{2}$. Teisalt aga

$$|PC| = |YC| - |YP| < R - |YP| \leqslant \frac{R}{2}\,,$$

mistõttu $|OP| > |PC|$ ning $\angle COP < \angle OCP$.
Olgu nüüd E selline punkt kolmnurga ABC ümberringjoonel, et CE on ümberringjoone diameeter, siis $\angle OCP = \angle ECB = \angle EAB$ ning $\angle EAB + \angle BAC = \angle EAC = 90^\circ$. Seega $\angle COP + \angle BAC < 90^\circ$.



Joonis 1

2. Näitame kõigepealt, et

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} ,$$

ehk samaväärselt

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geqslant a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc) .$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame, et

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \geqslant \\ &\geqslant 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = \\ &= 8a^{\frac{2}{3}}bc .\end{aligned}$$

Seega

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geqslant \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2+8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$$

ning

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} .$$

Analoogiliselt

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geqslant \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

ning

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} .$$

Liites nende võrratuste vastavad pooled, saame

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1 .$$

3. Vaatleme suvalist poissi P_0 ning paneme tähele, et vähemalt üht tema lahendatud ülesannetest pidi lahendama 3 või rohkem tüdrukut (sest selliseid ülesandeid on ülimalt 6 ning tüdrukuid on $21 > 6 \cdot 2$). Seega lahendas poiss P_0 ülimalt 5 sellist ülesannet, mida lahendas vähem kui 3 tüdrukut. Teisisõnu, 21 paarist (P_0, T), kus T on mingi tüdruk, lahendasid ülimalt $5 \times 2 = 10$ paari sellist ühist ülesannet, mida lahendas vähem kui 3 tüdrukut, ning kokku lahendasid ülimalt $21 \times 10 = 210$ paari (P, T), kus P on poiss ja T tüdruk, sellist ühist ülesannet, mida lahendas vähem kui 3 tüdrukut. Analoogiliselt saame, et ülimalt 210 paari (P, T) lahendasid sellist ühist ülesannet, mida lahendas vähem kui 3 poissi. Et iga paar (P, T) lahendas mingit ühist ülesannet ning neid paare on kokku $21^2 = 441 = 2 \cdot 210 + 21$, siis vähemalt 21 paari (P, T) lahendas niisugust ühist ülesannet, mida lahendas vähemalt 3 poissi ja vähemalt 3 tüdrukut — seega niisugune ülesanne on olemas.

   Märkus. Saab näidata, et ülesande väide ei kehti 20 poisi ja 20 tüdruku korral. Üldisemalt:

   a) kui $4N + 1$ poisist ja $4N + 1$ tüdrukust igaüks lahendas vähemalt $N + 1$ ülesannet ning iga poiss ja iga tüdruk lahendasid vähemalt üht ühist ülesannet, siis leidub ülesanne, mida lahendasid vähemalt 3 poissi ja vähemalt 3 tüdrukut;

   b) analoogiline väide ei kehti $4N$ poisi ja $4N$ tüdruku korral.

4. Tähistagu $\sum S(a)$ arvude $S(a)$ summat üle kõigi $n!$ permutatsiooni $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Paneme tähele, et iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral esineb korrutis $k_1 \cdot i$ summas $\sum S(a)$ parajasti $(n-1)!$ korda (üks kord iga sellise permutatsiooni a kohta, mille korral $a_1 = i$). Seega k_1 kordaja summas $\sum S(a)$ on

$$(n-1)! \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{(n+1)!}{2} .$$

   Et analoogiline arutlus kehtib iga k_j jaoks, kus $j = 1, 2, \ldots, n$, siis

$$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{j=1}^{n} k_j ,$$

mis jagub arvuga $n!$, kuna $n+1$ on paarisarv. Teisalt aga arv

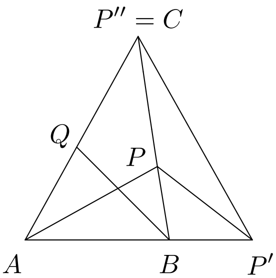
$$0+1+\ldots+(n!-1)=\frac{n!\cdot(n!-1)}{2}$$

ei jagu arvuga $n!$, sest $n!-1$ on paaritu arv (kuna $n>1$). Seega ei saa arvude $S(a)$ jagamisel arvuga $n!$ tekkivad jäägid olla kõik erinevad ning järelikult leiduvad sellised permutatsioobid b ja c, $b\neq c$, et $S(b)\equiv S(c)\pmod{n!}$.

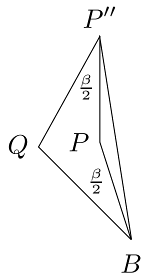
5. *Vastus:* 60°, 80° ja 40°.
Olgu kolmnurga ABC nurkade suurused $\angle BAC=\alpha=60^\circ$, $\angle ABC=\beta$ ja $\angle BCA=\gamma$. Võtame külje AB pikendusel üle tipu B punkti P' nii, et $|BP'|=|BP|$, ning kiirel AQ punkti P'' nii, et $|AP''|=|AP'|$ (vt. joonist 2). Siis $BP'P$ on võrdhaarne kolmnurk, kus $\angle BPP'=\angle BP'P=\dfrac{\beta}{2}$.
Et

$$|AQ|+|QP''|=|AB|+|BP'|=|AB|+|BP|=|AQ|+|QB|\ ,$$

siis $|QP''|=|QB|$. Kuna AP on võrdkülgse kolmnurga $AP'P''$ nurgapoolitaja, siis $|PP'|=|PP''|$.



Joonis 2



Joonis 3

Näitame nüüd, et punktid B, P ja P'' asuvad ühel sirgel, s.t. $P''=C$. Tõepoolest, kui see nii ei ole, siis kolmnurgas BPP'' on

$$\angle PP''Q=\angle PP'B=\angle PBQ=\frac{\beta}{2}$$

(vt. joonist 3, kus punkt P võib olla ka teisel pool sirget BP''). Seega $|BP| = |PP''| = |PP'|$, s.t. kolmnurk BPP' on võrdkülgne ning $\frac{\beta}{2} = 60^\circ$, kust $\alpha + \beta = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ — vastuolu.
Niisiis punktid B, P ja P'' on ühel sirgel ning $P'' = C$. Et kolmnurk BCQ on võrdhaarne, saame nüüd

$$\frac{\beta}{2} = \angle BCQ = \gamma = 120^\circ - \beta\ ,$$

kust $\beta = 80^\circ$ ja $\gamma = 40^\circ$.

6. Paneme kõigepealt tähele, et $ab + cd > ac + bd > ad + bc$, sest

$$(ab + cd) - (ac + bd) = (a - d)(b - c) > 0$$

ning

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (a - b)(c - d) > 0\ .$$

Avades ülesandes antud võrduses sulud ning koondades, saame

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2\ .$$

Seega

$$\begin{aligned}(ac + bd)(b^2 + bd + d^2) &= ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) = \\ &= acb^2 + acd^2 + a^2bd + bc^2d = \\ &= (ab + cd)(ad + bc)\ ,\end{aligned}$$

ehk $ac + bd$ on arvu $(ab + cd)(ad + bc)$ jagaja.
Oletame nüüd, et $ab + cd$ on algarv. Kuna $ab + cd > ac + bd$, siis ei ole arvudel $ab + cd$ ja $ac + bd$ ühiseid tegureid ning $ac + bd$ peab seega jagama arvu $ad + bc$. Et aga $ac + bd > ad + bc$, siis ei ole see võimalik.