2001.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Washingtonis (USA), 8.–9. juulil 2001

Esimene päev

1. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O ning olgu P tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt küljel BC.

   On teada, et $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30^\circ$.

   Tõesta, et $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

2. Tõesta, et

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

   mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral.

3. Matemaatikavõistlusest võtsid osa 21 tüdrukut ja 21 poissi.

   - Iga osavõtja lahendas ülimalt kuus ülesannet.
   - Iga tüdruku ja iga poisi korral leidub vähemalt üks ülesanne, mille lahendasid nad mõlemad.

   Tõesta, et leidub ülesanne, mille lahendasid vähemalt kolm tüdrukut ja vähemalt kolm poissi.

2001.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Washingtonis (USA), 8.–9. juulil 2001

Teine päev

4. Olgu $n > 1$ paaritu täisarv ning $k_1, k_2, \ldots, k_n$ etteantud täisarvud. Arvude $1, 2, \ldots, n$ iga järjestuse $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jaoks (neid järjestusi on kokku $n!$) olgu

   $$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ .$$

   Tõesta, et leiduvad kaks järjestust b ja c, $b \neq c$, mille korral $S(b) - S(c)$ jagub arvuga $n!$.

5. Kolmnurgas ABC lõikab nurga BAC poolitaja külge BC punktis P ning nurga ABC poolitaja lõikab külge CA punktis Q.

   On teada, et $\angle BAC = 60^\circ$ ning $|AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$.

   Millised on kolmnurga ABC nurkade võimalikud suurused?

6. Olgu a, b, c, d sellised täisarvud, et $a > b > c > d > 0$ ning

   $$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) \ .$$

   Tõesta, et $ab + cd$ ei ole algarv.