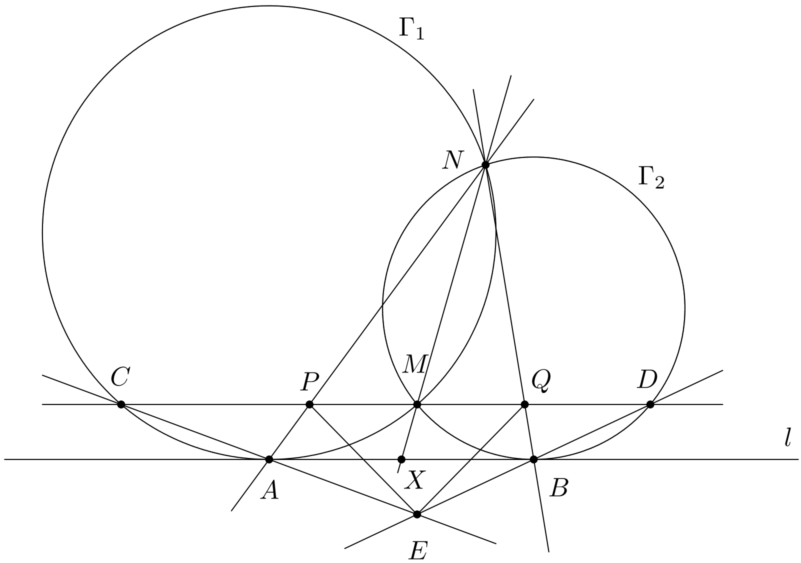
2000.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Kuna sirged AB ja CD on paralleelsed, siis $\angle EBA = \angle BDM$ (vt. joonist 1). Et sirge AB puutub ringjoont Γ_2 punktis B ning BM on puutepunktist tõmmatud lõikaja, siis $\angle BDM = \angle MBA$. Seega poolitab sirge AB nurga EBM. Analoogiliselt saame, et sirge BA poolitab nurga EAM.



Joonis 1

Niisiis on punkt E punkti M peegeldus sirge AB suhtes, millest järeldub, et sirge EM on risti sirgega AB ja seega ka sirgega CD. Kolmnurga EPQ võrdhaarsuse näitamiseks piisab nüüd näidata, et tema kõrgus on ühtlasi mediaaniks, ehk $|MP| = |MQ|$.

Lõigaku sirge NM sirget AB punktis X. Kuna XA on ringjoonele Γ_1

tõmmatud puutuja, siis $|XA|^2 = |XM| \cdot |XN|$. Analoogiliselt saame, et $|XB|^2 = |XM| \cdot |XN|$. Nüüd $|XA| = |XB|$; et aga sirged AB ja PQ on paralleelsed, siis ka $|MP| = |MQ|$.

2. Vaatleme kõigepealt juhtu, kui tõestatava võrratuse vasakul poolel on üks tegur mittepositiivne. Olgu üldisust kitsendamata $a - 1 + \dfrac{1}{b} \leqslant 0$, siis $a \leqslant 1$ ja $b \geqslant 1$, millest saame $c - 1 + \dfrac{1}{a} \geqslant 0$ ja $b - 1 + \dfrac{1}{c} \geqslant 0$. Seega on ülejäänud kaks tegurit mittenegatiivsed; kõigi kolme korrutis on aga mittepositiivne, niisiis ilmselt väiksem arvust 1.

   Pidades silmas eelpoolöeldut võime nüüd eeldada, et tõestatava võrratuse vasakul poolel on kõik tegurid positiivsed. Teisendades tõestatava võrratuse vasaku poole tegureid, saame

   $$b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\right) = b\left(1 + a - \frac{1}{b}\right).$$

   Analoogiliselt $c - 1 + \dfrac{1}{a} = c\left(1 + b - \dfrac{1}{c}\right)$ ja $a - 1 + \dfrac{1}{b} = a\left(1 + c - \dfrac{1}{a}\right)$.

   Nüüd

   $$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = \left(a - \left(1 - \frac{1}{b}\right)\right) \cdot b\left(a + \left(1 - \frac{1}{b}\right)\right) =$$
   $$= b\left(a^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2\right) \leqslant ba^2$$

   ning samuti

   $$\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant cb^2$$

   ja

   $$\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \leqslant ac^2.$$

   Niisiis pole tõestatava võrratuse vasak pool suurem arvust

   $$\sqrt{ba^2 \cdot cb^2 \cdot ac^2} = \sqrt{(abc)^3} = 1.$$

3. *Vastus:* $\lambda \geqslant \dfrac{1}{n-1}$.

Lahendus: Oletame, et $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, siis $\lambda_0 = \dfrac{1}{\lambda} - (n-1) > 0$. Olgu X kõigi kirpude kauguste summa parempoolseimast kirbust. Kui käigu tulemusena jääb see kirp ikka kõige parempoolsemaks, siis arv X kahaneb. Kui aga käigu tulemusena osutub mõni kirp asetsevat kauguse $z > 0$ võrra paremal kui esialgne parempoolseim, siis arv X kahaneb vähemalt arvu $\dfrac{z}{\lambda} - (n-1)z = \lambda_0 z$ võrra. Arv X ei kahane väiksemaks kui 0. Seega saab võrreldes algseisuga lõpuks parempoolseim kirp olla esialgsest parempoolseimast kirbust ülimalt kaugusel $\dfrac{X_0}{\lambda_0}$, kus X_0 on arvu X lähteväärtus.

Teiselt poolt oletame, et $\lambda \geqslant \dfrac{1}{n-1}$, siis $\lambda_1 = (n-1) - \dfrac{1}{\lambda} \geqslant 0$. Teeme käigu alati vasakpoolseima kirbuga parempoolseima suhtes. Nii on parempoolseim kirp võrreldes esialgse parempoolseima kirbuga arvu $z > 0$ võrra paremal, samuti kasvab summa X suuruse $(n-1)z - \dfrac{z}{\lambda} = \lambda_1 z \geqslant 0$ võrra. Niisiis arv X ei kahane kunagi. Ent $z \geqslant \lambda \cdot \dfrac{X}{n-1} \geqslant \lambda \dfrac{X_0}{n-1} > 0$. Järelikult võib sel juhul viia kõik kirbud kuitahes kaugele paremale, sest järgmised $n-1$ käiku viivad kõik kirbud paremale.

Teine päev

4. *Vastus:* 12.

Lahendus 1: Paigutame kaardid 1, 2 ja 3 erinevatesse kastidesse (selleks on $3! = 6$ erinevat võimalust) ning ülejäänud n kaarti niisugusse kasti, kus paiknevad kaardid, mis annavad mooduli 3 järgi sama jäägi kui paigutatav kaart. Teine võimalus on paigutada kaardid 1 ja 100 kahte erinevasse kasti (selleks on samuti $\dbinom{3}{2} = 6$ erinevat võimalust) ning kaardid $2, 3, \ldots, 99$ ülejäänud kasti.

Näitame, et rohkem paigutusi ei ole. Tõestame üldisema väite H_n: *kaartide* $1, 2, \ldots, n$ *puhul rohkem paigutusi pole, kui analoogiliselt jagada kaar-*

did kastidesse mooduli 3 *järgi või siis paigutada kaardid* 1 *ja* n *erinevatesse ning kaardid* $2, 3, \ldots, n-1$ *ülejäänud kasti.*

Ilmselt on väide H_3 tõene (olgugi et siin langevad nimetatud kaks paigutust kokku). Eeldame nüüd, et kehtib väide H_n ning näitame, et sellest järeldub ka väite H_{n+1} kehtivus.

Oletame, et kaart $n+1$ on ainus oma kastis. Kui kaart 1 pole samuti ainus, siis tähistame arvuga N ülejäänud kahe kasti suurima kaardi summat. Kuna $n+2 \leqslant N \leqslant n+(n-1) = 2n-1$, saame sellesama arvu N ka kaartide $n+1$ ja $N-n-1$ summana — vastuolu. Niisiis peab kaart 1 olema samuti ainus oma kastis: jõudsime väites H_n leiduva ühe lahendini.

Kui aga kaart $n+1$ ei ole ainus oma kastis, siis selle sealt eemaldamisel peab väite H_n kohaselt leiduma n kaardiga lahend. See ei saa olla aga lahend kujul $1; n; 2, 3, \ldots, n-1$, sest lihtne on veenduda, et kaarti $n+1$ ei saa siis paigutada ühtegi kolmest kastist. Tõepoolest, oletame, et ta paigutatakse kaardiga 1 samasse kasti, siis $(n+1)+2 = n+3$; kui ta paigutatakse kaardiga n samasse kasti, siis $1+(n+1) = n+2$; kui ta aga paigutatakse ülejäänud kaartidega samasse kasti, siis $1+(n+1) = n+2$: igal juhul saame vastuolu.

Seega n kaardi korral leiduv lahend peab olema kaartide paigutus mooduli 3 järgi tekkivate jääkide kaupa. Siis peame paigutama kaardi $n+1$ täpselt sinna, kus paiknevad kõik teised kaardid, mis annavad mooduli 3 järgi sama jäägi. Tõepoolest, juhul $n > 3$ kehtib $(n+1)+(n-2) = n+(n-1)$. Kui kaart $n+1$ paigutada nüüd mitte samasse kasti, kus on kaart $n-2$, siis leidub kaks erinevat kastipaari, kus mingi kahe kaardi summa langeb kokku.

Niisiis on $n+1$ kaardi korral vaid veel üks lahendus, milles siis kaardid on paigutatud kastidesse mooduli 3 järgi. Järelikult kehtib väide H_{n+1} ning matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt kehtib siis ka ülesandes nõutav väide H_{100}.

Lahendus 2: Märgistame kastid tähtedega A, B ja C. Vaadelda on vaja 4 põhimõtteliselt erinevat juhtu.

Juht 1: Kastis A on kaart 1, kastis B kaart 2, kastis C kaart 3.

Juht 2: Kastis A on kaardid 1 ja 2.

Juht 3: Kastis A on kaardid 1 ja 3, kastis B kaart 2.

Juht 4: Kastis A on kaart 1, kastis B kaardid 2 ja 3.

Näitame, et juhtudest 1 ja 4 saame kummastki kuus võimalikku paigutust (kastide vahetamise täpsusega üheainsa) ning juhud 2 ja 3 viivad vastuolule.

Juhul 1 saame lihtsasti matemaatilise induktsiooni meetodil, et kaart n tuleb paigutada kasti, kus on kaardid, mis annavad arvuga n sama jäägi mooduli 3 järgi. Selline induktsioon on eelmise lahenduse lõpuosas ka läbi viidud. On ka selge, et niisugune paigutus on võimalik — mingi antud kahe erinevast kastist pärit kaardi summa korral saame selle summa mooduli 3 järgi tekkiva jäägi põhjal otsustada, kust kaarti ei võetud: jäägi 0 korral on selleks kastiks A, jäägi 1 korral B ning jäägi 2 korral kast C. Märkame ka, et see paigutus annab tegelikult $3! = 6$ erinevat paigutusviisi.

Juhul 2 olgu n vähim kaart, mis pole kastis A. Oletame üldisust kitsendamata, et see kaart on kastis B. Olgu m vähim kaart kastis C. Siis kaart $m-1$ ei saa olla kastis C. Kui ta on kastis A, siis $m+(n-1) = (m-1)+n$, vastuolu. Seega peab kaart $m-1$ olema kastis B, ent ka nüüd $(m-1)+2 = m+1$, vastuolu.

Juhul 3 olgu n vähim kaart kastis C, seega peab kaart $n-1$ olema kastis A või B. Kui kaart $n-1$ on kastis A, siis $(n-1)+2 = n+1$, vastuolu. Kui aga kaart $n-1$ on kastis B, siis $(n-1)+3 = n+2$, vastuolu.

Juhul 4 olgu n vähim kaart kastis C. Kaart $n-1$ ei saa olla kastis A, sest vastasel korral $(n-1)+2 = 3+n$, seega peab kaart $n-1$ olema kastis B. Nüüd ei saa kaart $n+1$ olla kastis A, muidu $(n+1)+2 = 3+n$, ega kastis B ega C (vastasel korral $1+(n+1) = 2+n$). Seega kaarti $n+1$ ei tohi olemas olla, millest $n = 100$. Nüüd saame näidata matemaatilise induktsiooni teel, et kaardid $4, 5, \ldots, 98$ on kõik kastis B. Tõepoolest, olgu mingi kaart m kastis B. Kui kaart $m+1$ oleks kastis A, siis $100+m = 99+(m+1)$.

Selline paigutus (kaart 1 kastis A, kaart 100 kastis C, ülejäänud kaardid kastis B) vastab aga ülesande tingimustele: summad $3, 4, \ldots, 100$ määravad üheselt võtmata kaardiga kastina C, summa 101 kasti B ja summad $102, 103, \ldots, 199$ kasti A. Samuti nagu juhul 1, saame siit tegelikult 6 erinevat paigutusviisi.

5. *Vastus:* Selline arv leidub.

Lahendus: Paneme tähele, et paaritu arvu b korral

$$2^{ab}+1=(2^a+1)\cdot(2^{a(b-1)}-2^{a(b-2)}+\ldots+1)\ ,$$

seega on arv 2^a+1 arvu $2^{ab}+1$ teguriks. Järelikult piisab leida arv m nii, et

1) arvul m on vähe algtegureid,
2) arvul 2^m+1 on palju algtegureid,
3) arv 2^m+1 jagub arvuga m.

Sellisel juhul saame võtta mingi küllaldase arvu erinevate algarvude, millega jagub arv 2^m+1, aga mitte arv m, korrutise k nii, et arvul km on täpselt 2000 algtegurit. Siis jagub arv 2^m+1 arvuga km, järelikult jagub selle arvuga ka arv $2^{km}+1$.

Lihtsaimal juhul on arvul m täpselt üks algtegur, s.t. $m=p^q$ mingi algarvu p ja positiivse täisarvu q korral. Ent Fermat' väikese teoreemi põhjal jagub arv 2^p-2 arvuga p, seega ainus juht, kus arv 2^p+1 jagub arvuga p, on $p=3$. Niisiis tuleb selgitada, kas õnnestub leida mingi mittenegatiivne täisarv h, mille korral arv $a_h=2^m+1$ jagub arvuga $m=3^h$ ning kas tal on palju algtegureid.

Näeme, et

$$a_{h+1}=2^{3^{h+1}}+1=(2^{3^h}+1)(2^{2\cdot 3^h}-2^{3^h}+1)=a_h(2^{2m}-2^m+1)\ .$$

Aga $2^m=a_h-1$, seega $a_{h+1}=a_h(a_h^2-3a_h+3)$. Nüüd leiame $a_0=3$ põhjal $a_1=9$; matemaatilise induktsiooni teel tõestame, et arv a_h jagub arvuga 3^{h+1}.

Ilmselt jagub arv $a_1=9$ arvuga $3^{1+1}=9$. Jagugu nüüd arv a_h arvuga 3^{h+1}; siis jagub arv $a_h^2-3a_h+3$ arvuga 3 ning seega jagub arv a_{h+1} arvuga $3^{h+1}\cdot 3=3^{h+2}$.

Kuna arv a_h on arvu a_{h+1} teguriks, on arvu a_h iga algtegur ühtlasi arvu a_{h+1} algteguriks. Olgu siis $a_h=3^{h+1}b_h$. Nüüd

$$b_{h+1}=b_h\cdot\frac{a_h}{3a_{h+1}}=b_h(3^{2h+1}b_h^2-3^{h+2}b_h+1)\ .$$

Et $3^{2h+1}b_h^2 - 3^{h+2}b_h + 1 > 1$, siis peab sellel arvul olema mingi algtegur $p > 1$. Ent arv $3^{2h+1}b_h^2 - 3^{h+2}b_h + 1$ on arvu $3b_h$ kordne, millele on liidetud arv 1, seega arv $3^{2h+1}b_h^2 - 3^{h+2}b_h + 1$ ei jagu ei arvuga b_h ega algarvuga 3. Niisiis on arvul b_{h+1} vähemalt üks algtegur $p > 3$, millega ei jagu arv b_h. Saime, et arvul b_{h+1} on vähemalt h erinevat arvust 3 suuremat algtegurit.

Nüüd võtame tõestuse alguses märgitud arvu $m = 3^{2000}$. Arvul m on vaid algtegur 3, arvul $2^m + 1 = 3^{2001}b_{2000}$ on vähemalt 1999 arvust 3 erinevat algtegurit ning arv $2^m + 1$ jagub arvuga m. Tähistame tähega k arvu b_{2000} täpselt 1999 erineva algteguri korrutise. Siis $N = km$ on arv, mis rahuldab ülesande tingimusi: tal on täpselt 2000 erinevat algtegurit ning arv $2^N + 1$ jagub arvuga N.

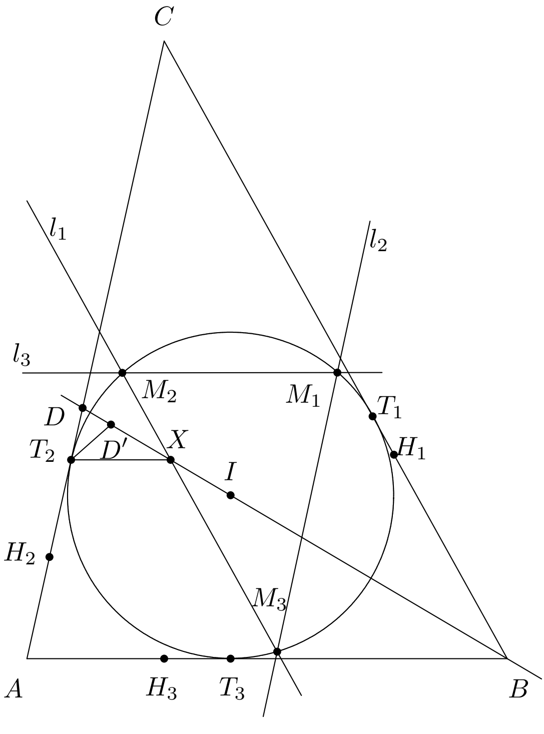
6. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt (vt. joonist 2). Lõikugu sirge, mis on paralleelne sirgega AB ja läbib punkti T_2, sirgega BI punktis X. Näitame, et punkt X on punkti H_2 peegeldus sirge T_2T_3 suhtes.

Lõikugu sirge AC sirgega BI punktis D. Nüüd $BH_2 \perp H_2D$ ja $IT_2 \perp T_2D$, millest järeldub, et kolmnurgad BH_2D ja IT_2D on sarnased. See tähendab, et $\dfrac{|H_2T_2|}{|T_2D|} = \dfrac{|BI|}{|ID|}$. Ent IC on kolmnurga BCD nurgapoolitaja, seega $\dfrac{|BI|}{|ID|} = \dfrac{|BC|}{|DC|}$.

Olgu punkt D' võetud sirgel BI nii, et $|T_2D| = |T_2D'|$ (punkt D' erineb punktist D, välja arvatud juhul, kui sirge T_2D on risti sirgega BI). Siis $\angle T_2D'X = \angle CDB$. Samuti, kuna sirge T_2X on paralleelne sirgega BA, peab olema $\angle T_2XD' = \angle CBD$. Siit järeldub, et kolmnurgad T_2XD' ja CBD on sarnased, mis tähendab, et $\dfrac{|BC|}{|DC|} = \dfrac{|XT_2|}{|D'T_2|} = \dfrac{|XT_2|}{|DT_2|}$, sest $|D'T_2| = |DT_2|$.

Oleme seega näidanud, et $\dfrac{|H_2T_2|}{|T_2D|} = \dfrac{|XT_2|}{|DT_2|}$, millest järeldub võrdus $|H_2T_2| = |XT_2|$. Sirge T_2X on paralleelne sirgega BA, millest saame, et $\angle BAC = \angle AT_2X = \angle T_2XH_2 + \angle T_2H_2X = 2 \cdot \angle T_2XH_2$ — kolmnurk T_2H_2X on võrdhaarne. Seetõttu $\angle T_2XH_2 = \dfrac{\angle BAC}{2} = \angle BAI$. Sirged

T_2X ja BA on paralleelsed, seega on paralleelsed ka sirged H_2X ja IA. Aga sirge IA on risti sirgega T_2T_3, millest järeldub, et ka sirge H_2X on risti sirgega T_2T_3 ning punkt X on punkti H_2 peegeldus sirge T_2T_3 suhtes.



Joonis 2

Nüüd $\angle H_3H_2A = \angle ABC$, sest $\dfrac{\pi}{2} - \angle H_3H_2B = \dfrac{\pi}{2} - \angle H_3CB$ (nelinurk BCH_2H_3 on kõõlnelinurk, kusjuures BC on tema ümberringjoone diameeter), $\dfrac{\pi}{2} - \angle H_3CB = \angle ABC$. Seega sirge H_2H_3 peegeldus sirge T_2T_3 suhtes on sirge, mis läbib punkti X ja moodustab sirgega T_2X nurga ABC, ehk teisisõnu, tegemist on sirgega BC paralleelse ja punkti X läbiva sirgega.

Olgu nüüd punktid M_1, M_2, M_3 vastavalt punktide T_1, T_2, T_3 peegeldused sirgete AI, BI, CI suhtes. Siis peab olema

$$\angle M_2XT_2 = 2 \cdot \angle IXT_2 = 2 \cdot \angle ABI = \angle ABC \ ,$$

kuna sirge AB on paralleelne sirgega T_2X. Ent $\angle ABC$ on sirgete T_2X ja BC vaheline nurk. Siit järeldub, et sirge M_2X on paralleelne sirgega BC, ehk teisisõnu, M_2 asetseb sirge H_2H_3 peegeldusel sirge T_2T_3 suhtes.

Analoogiliselt saame, et M_3 asetseb sellelsamal peegeldusel. Samuti leiame, et sirge M_1M_3 on sirge H_1H_3 peegelduseks sirge T_1T_3 suhtes ja sirge M_1M_2 on sirge H_1H_2 peegelduseks sirge T_1T_2 suhtes. Niisiis on neist kolmest peegeldusest moodustunud kolmnurk täpselt $M_1M_2M_3$.