2000.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Taejonis (Lõuna-Korea), 19.–20. juulil 2000

Esimene päev

1. Kaks ringjoont Γ_1 ja Γ_2 lõikuvad punktides M ja N.

   Olgu l ringjoonte Γ_1 ja Γ_2 selline ühine puutuja, millele punkt M on lähemal kui punkt N. Puutugu sirge l ringjoont Γ_1 punktis A ja ringjoont Γ_2 punktis B. Lõigaku punkti M läbiv ja sirgega l paralleelne sirge ringjoont Γ_1 teistkordselt punktis C ja ringjoont Γ_2 teistkordselt punktis D.

   Sirged CA ja DB lõikuvad punktis E; sirged AN ja CD lõikuvad punktis P; sirged BN ja CD lõikuvad punktis Q.

   Tõesta, et $|EP| = |EQ|$.

2. Olgu a, b, c sellised positiivsed reaalarvud, et $abc = 1$. Tõesta, et

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1\,.$$

3. Olgu $n \geqslant 2$ positiivne täisarv. Horisontaalsel sirgel paiknevad n kirpu, kusjuures nad kõik ei asu ühes ja samas punktis.

   Defineerime positiivse reaalarvu λ jaoks *käigu* järgmiselt:

   - valime mistahes kaks kirpu, mis paiknevad mingites punktides A ja B, kus A asub B-st vasakul pool;
   - laseme kirbul punktist A hüpata punkti C, mis asub antud sirgel B-st paremal pool ning rahuldab tingimust $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \lambda$.

   Leia kõik λ väärtused, mille korral antud sirgel valitud mistahes punkti M ning n kirbu mistahes algpaigutuse jaoks leidub selline lõplik käikude jada, mille järel kõik kirbud paiknevad punktist M paremal pool.

2000.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Taejonis (Lõuna-Korea), 19.–20. juulil 2000

Teine päev

4. Mustkunstnikul on sada kaarti arvudega 1 kuni 100. Ta asetab need kaardid kolme kasti: punasesse, valgesse ja sinisesse, nii et igas kastis on vähemalt üks kaart.

   Keegi pealtvaatajatest valib kolmest kastist välja kaks, võtab kummastki neist ühe kaardi ja teatab võetud kaartidel olevate arvude summa. Teatatud summa järgi määrab mustkunstnik kindlaks kasti, millest kaarti ei võetud.

   Mitmel erineval viisil on võimalik kõik kaardid nii kastidesse jaotada, et trikk alati õnnestuks? (Kaht jaotust loeme erinevateks, kui neis vähemalt üks kaart pannakse erinevatesse kastidesse.)

5. Kas leidub niisugune positiivne täisarv n, et
   - arv n jagub täpselt 2000 erineva algarvuga, ning
   - arv $2^n + 1$ jagub arvuga n?

6. Olgu AH_1, BH_2, CH_3 teravnurkse kolmnurga ABC kõrgused. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC, CA, AB vastavalt punktides T_1, T_2, T_3. Olgu l_1, l_2, l_3 sirged, mis saadakse sirgete H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 peegeldamisel vastavalt sirgete T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 suhtes.

   Tõesta, et sirged l_1, l_2, l_3 moodustavad kolmnurga, mille tipud paiknevad kolmnurga ABC siseringjoonel.