1999.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. *Vastus:* Sobivad hulgad on kõigi korrapäraste n-nurkade tippude hulgad.

   Lahendus: Olgu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ punktihulga S kumera katte tippudeks. Edaspidises vaatleme indekseid mooduli k järgi. Näitame kõigepealt, et see kumer kate on korrapärane k-nurk.

   Punkt A_{i+1} peab asuma lõigu $A_i A_{i+2}$ keskristsirgel, muidu asuks tema peegeldus punktihulga S kumerast kattest väljaspool. Seega on hulknurga $A_1 A_2 \ldots A_k$ kõik küljed võrdsed. Analoogiliselt peavad punktid A_{i+1} ja A_{i+2} olema teineteise peegeldusteks lõigu $A_i A_{i+3}$ keskristsirge suhtes, muidu asuks üks neist peegeldustest väljaspool punktihulga S kumerat katet. Niisiis on ka hulknurga $A_1 A_2 \ldots A_k$ kõik nurgad võrdsed, mis tähendab, et see hulknurk on korrapärane.

   Hulga S mistahes sümmeetriatelg peab olema ka hulknurga $A_1 A_2 \ldots A_k$ sümmeetriateljeks, seega peab see sümmeetriatelg läbima korrapärase k-nurga $A_1 A_2 \ldots A_k$ keskpunkti C. Paiknegu hulga S mingi punkt X nimetatud k-nurga sisepiirkonnas. Siis asub ta mingil kolmnurgal $A_i A_{i+1} C$ või mingi kolmnurga $A_i A_{i+1} C$ sisepiirkonnas. Kuna punkt C asetseb lõikude $A_i X$, $A_{i+1} X$ ja $A_i A_{i+1}$ keskristsirgel, on ta kolmnurga $A_i A_{i+1} X$ ümberringjoone keskpunktiks. Punkt X asub seega ringjoonel keskpunktiga C, mis läbib punkte A_i ja A_{i+1}. Et aga kõik kolmnurga $A_i A_{i+1} X$ punktid, välja arvatud punktid A_i, A_{i+1} ja X, asuvad nimetatud kolmnurga ümberringjoone sees, siis ei saa punkt X asuda selle kolmnurga ümberringjoonel ja mitte kuuluda k-nurga $A_1 A_2 \ldots A_k$ tippude hulka.

2. *Lahendus 1.* Teisendame tõestatava võrratuse paremat poolt.

$$\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4 = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^2\right)\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right) =$$
$$= 8\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(x_ix_j\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant 8\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2).$$

Pidades silmas, et suurim reaalarv A, mille puhul mistahes reaalarvude p ja q korral $(p+q)^2 \geqslant Apq$, on $A=4$ (ahelvõrduse esimene võrratus), saame konstandi $C=\frac{1}{8}$.

Kui ahelvõrratuse teine võrratus on võrdus, siis peab $n-2$ arvudest x_i, $i=1,2,\ldots,n$ olema võrdsed nulliga. Olgu siis üldisust kitsendamata $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$. Nüüd on esimene võrratus võrdusena kujul $(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2$, millest $x_1=x_2$. Lihtne on näha, et need tingimused on võrduseks ka piisavad.

Lahendus 2. Võttes $x_1=x_2=1$ ning $x_i=0$, kui $i>2$, saame võrduse, kus $C=\frac{1}{8}$, niisiis ei saa suurus C olla väiksem kui $\frac{1}{8}$.

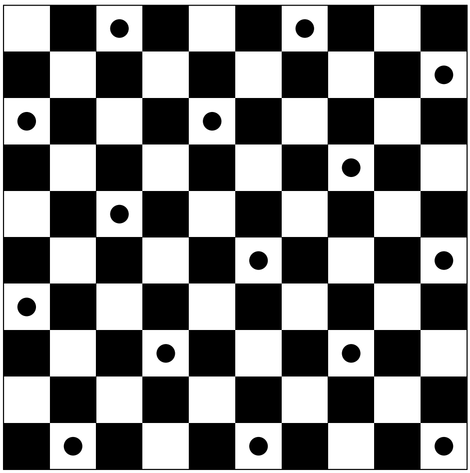
Viime nüüd läbi induktsiooni arvu n järgi. Juhul $n=2$ on antud võrratus $C=\frac{1}{8}$ korral samaväärne võrratusega $(x_1-x_2)^4 \geqslant 0$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1=x_2$.

Juhul $n>2$ eeldame võrratuse kehtivust naturaalarvu $n-1$ korral ning tähistame $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$; võime ka üldisust kitsendamata eeldada, et $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$. Moodustame vastava võrratuse ning asendame seal nüüd suurused x_1 ja x_2 vastavalt arvudega 0 ja x_1+x_2. Paremal pool asuv summa ei muutu, vasak pool kasvab aga arvu $3x_1x_2(x_1+x_2)S-x_1x_2(x_1^2+x_2^2)$ võrra, kus $S=x_3+x_4+\ldots+x_n$. Arvu S väärtus on vähemalt $\frac{A}{3}$ (viimasega võrdne parajasti juhul $n=3$, $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$), seega kasvab vasak pool vähemalt arvu

$x_1x_2(Ax_1+Ax_2-x_1^2-x_2^2)$ võrra. Välja arvatud juhul $x_1 = 0$, on viimane arv rangelt positiivne. Saime mitte väiksema vasaku poolega võrratuse $n-1$ arvu jaoks, mis eelduse põhjal kehtib. Järelikult kehtib saadud võrratus mistahes naturaalarvu n korral.

3. *Vastus:* $\dfrac{n(n+2)}{4}$.

Lahendus: Olgu $n = 2m$. Värvime ruudustiku malekorras mustaks ja valgeks. Piisab näidata, et $\dfrac{m(m+1)}{2}$ märgitud valget ruutu on tarvilik ja piisav selleks, et igal mustal ruudul oleks märgitud valge naaber — kui nii, siis värvime analoogiliselt mustad ruudud ja ülesande tingimus on täidetud.



Joonis 1

Vaatleme kõigepealt mooduli 4 järgi jäägi 1 andva ruutude arvuga valgeid diagonaale, mis paiknevad ühel pool musta peadiagonaali. Nendel diagonaalidel märgime, alustades iga kord äärest, ruudud üle ühe; seega on sellisel diagonaalil pikkusega $4r+1$ märgitud $2r+1$ ruutu. Teisel pool musta peadiagonaali märgime mooduli 4 järgi jäägi 3 andva ruutude arvuga valgetel diagonaalidel, alustades iga kord äärest, ruudud üle ühe. Sellistel diagonaalidel pikkusega $4r-1$ on märgitud $2r$ ruutu (juhul $n=10$ sobib näiteks joonisel 1 antud märkimisviis). Nüüd on iga musta diagonaali kõrval niiviisi märgitud valge diagonaal, järelikult on iga musta ruudu kõrval märgitud valge ruut. Kokku on märgitud $1+3+\ldots+(m-1)+m+(m-2)+\ldots+2$ valget ruutu paarisarvu m korral või $1+3+\ldots+m+(m-1)+\ldots+4+2$ valget ruutu paaritu arvu m korral, seega igal juhul on märgitud $1+2+\ldots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$ valget ruutu. Ülalöeldu põhjal on nii märkida piisav, et ülesande tingimus oleks täidetud.

Põhjendame, et väiksema arvu valgete ruutude märkimisel pole igal mustal ruudul märgitud valget naabrit. Vaatleme paaritu arvu ruutudega musti diagonaale. Nende pikkused on $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$. Mistahes märgitud valge ruudu kõrval asub ülimalt kaks täpselt kahe sellise diagonaali ruutu, seega on tarvis märkida vähemalt $1+2+\ldots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$ valget ruutu.

Teine päev

4. *Vastus:* $(1,p)$, kus p on mistahes algarv; $(2,2)$; $(3,3)$.

   Lahendus: Ilmselt on arvupaar $(1,p)$ mistahes algarvu p korral lahendiks. Eeldame siis edasises, et $n>1$ ning tähistame tähega q arvu n vähima algarvulise jagaja. Näitame kõigepealt, et $q=p$.

   Olgu x vähim positiivne täisarv, mille korral $(p-1)^x \equiv -1 \pmod{q}$, ning y vähim positiivne täisarv, mille korral $(p-1)^y \equiv 1 \pmod{q}$. Fermat' väikese teoreemi põhjal $(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, seega leidub niisugune täisarv $y<q$. Ülesande eelduse põhjal teame, et $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{n}$, niisiis $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$ ning leidub ka niisugune täisarv x. Esitame arvu n kujul $n=sy+r$, kus $0 \leqslant r < y$; saame, et $-1 \equiv (p-1)^{sy+r} \equiv ((p-1)^y)^s \cdot (p-1)^r \equiv (p-1)^r \pmod{q}$. Seega $x \leqslant r < y$. Kuna $1 \not\equiv -1 \pmod{q}$, siis $r \neq 0$.

   Esitame nüüd arvu n kujul $n=tx+u$, kus $0 \leqslant u < x$. Siis $-1 \equiv (p-1)^n \equiv \equiv (-1)^t(p-1)^u \pmod{q}$. Arv t ei saa olla paarisarv, sest siis $(p-1)^u \equiv -1 \pmod q$, mis läheb vastuollu arvu x minimaalsusega. Niisiis on t paaritu arv ja seega $(p-1)^u \equiv 1 \pmod q$, kus $0 \leqslant u < x < y$. Kui $u \neq 0$, siis annab saadud kongruents vastuolu arvu y minimaalsusega. Seega $u = 0$, millest $n = tx$. Et aga $x < y < q$ ning arv q on arvu n vähim algarvuline jagaja, siis $x = 1$, millest $p - 1 \equiv -1 \pmod q$. Kuna p ja q on algarvud, siis $p = q$.

Niisiis on p arvu n vähim algarvuline jagaja. Teame ka, et $n \leqslant 2p$. Seega kas $n = p$, $p = 2$ või $p = 4$. Viimane juht ei sobi, kuna 4 pole algarv.

Ilmselt on $n = p = 2$ ja $n = p = 3$ lahenditeks. Eeldame nüüd, et $p > 3$ ja näitame, et sel juhul lahendid puuduvad.

Arendame binoomvalemi järgi

$$1 + (-1+p)^p = 1 + (-1) + \binom{p}{1} \cdot p - \binom{p}{2} \cdot p^2 + \binom{p}{3} \cdot p^3 - \dots$$

Kuna kõik binoomkordajad on täisarvud, siis juhul $i \geqslant 3$ jaguvad kõik arvud p^i arvuga p^3. Seega on saadud avaldis kujul $p^2 + wp^3$, kus w on mingi positiivne täisarv; see summa ei jagu niisiis arvuga p^3. Ent juhul $p > 3$ jagub arv p^{p-1} arvuga p^3, mis tähendab, et arv $(p-1)^p + 1$ ei jagu arvuga p^{p-1}, vastuolu.

Seega on lahendid $(1, p)$, kus p on mistahes algarv, $(2, 2)$ ning $(3, 3)$.

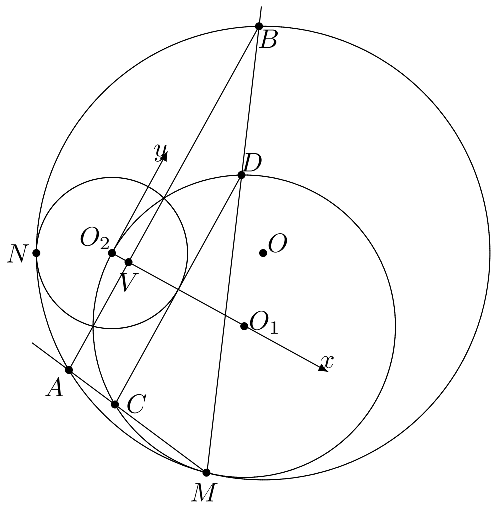
5. Olgu O, O_1 ja O_2 vastavate ringjoonte Γ, Γ_1 ja Γ_2 keskpunktid ning r, r_1 ja r_2 vastavalt nende ringjoonte raadiused (vt. joonis 2). Lõigaku sirge CD sirget O_1O_2 punktis W ning tähistame $|O_2W| = x$. Tõestame, et $x = r_2$, sellest järeldub vahetult ülesande väide.

   Võtame ristkoordinaadistiku alguspunktiga O_2, x-telje kiire O_2O_1 suunalise ning olgu punkt $O(a, b)$. Märgime, et punktid O ja M ei pea üldiselt asetsema sirgel O_1O_2. Lõikugu sirge AB sirgega O_1O_2 punktis V.

   Paneme kõigepealt tähele, et $|O_2V| = \dfrac{r_2^2}{2r_1}$. Tõepoolest, olgu X ükskõik kumb ringjoonte Γ_1 ja Γ_2 lõikepunktidest ning Y lõigu O_2X keskpunkt. Siis võrdhaarsest kolmnurgast XO_1O_2 saame $O_1Y \perp O_2X$. Samuti $O_1O_2 \perp AB$. Seega on kolmnurgad O_1YO_2 ja XVO_2 sarnased, sest nurk O_1O_2Y on neil ühine. Saame, et

$$\frac{|O_2V|}{|O_2X|} = \frac{|O_2Y|}{|O_2O_1|},$$

ehk teisiti $|O_2V| = \dfrac{r_2^2}{2r_1}$.



Joonis 2

Homoteetsusteisendus keskpunktiga M ja teguriga $\dfrac{r}{r_1}$ viib punkti O_1 punktiks O ja lõigu CD lõiguks AB. Järelikult $EF \perp O_1O_2$ ning punkti O_1 kaugus sirgest CD on võrdne arvuga $\dfrac{r_1}{r}$ läbikorrutatud punkti O kaugusega sirgest AB. Teisisõnu,

$$r_1 - x = \frac{r_1}{r} \cdot \left(a - \frac{r_2^2}{2r_1}\right). \tag{1}$$

Leiame nüüd a. Saame a ja b suhtes kaks võrrandit, kui vaatleme punkti

O kaugusi punktidest O_1 ja O_2,

$$\begin{cases} (r-r_1)^2 = (r_1-a)^2+b^2 \\ (r-r_2)^2 = a^2+b^2 \end{cases}.$$

Lahutades esimesest võrrandist teise ja teisendades, saame

$$a = \frac{r_2^2}{2r_1} + r - r\cdot\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Asendades nüüd suuruse a võrrandisse (1), saame $x = r_2$.

6. Tähistame $c = f(0)$ ning olgu hulk $A = \{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Kui $a \in A$, siis võime võtta $a = f(y)$ ja $x = a$ ning lähtevõrrandist

$$c = f(a-a) = f(a) + a^2 + f(a) - 1,$$

niisiis

$$f(a) = \frac{1+c-a^2}{2}. \tag{2}$$

Paneme tähele, et $c \neq 0$, sest vastasel korral, võttes lähtevõrrandis $y = 0$, saame

$$f(x-c) = f(c) + xc + f(x) - 1 \tag{3}$$

ning seega $f(0) = f(c) = 1$, vastuolu.

Võrrandist (3) saame ka, et mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral

$$f(x-c) - f(x) = xc + (f(c)-1)\,,$$

seega võib avaldise $xc + (f(c)-1)$ väärtuseks olla mistahes reaalarv. Nii võime mistahes antud $x \in \mathbb{R}$ korral leida arvud $a, b \in A$ nii, et $x = a - b$.

Seega $f(x) = f(a-b) = f(b) + ab + f(a) - 1$, millest (2) abil

$$f(x) = c - \frac{b^2-2ab+a^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

Muuhulgas kehtib saadu ka mistahes $x \in A$ korral. Võrreldes tulemust $f(x) = c - \dfrac{x^2}{2}$ võrdusega (2), saame, et $c = 1$. Niisiis mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Teiselt poolt pole raske veenduda, et saadud funktsioon rahuldab antud funktsionaalvõrrandit. Tõepoolest,

$$f(x - f(y)) = 1 - \frac{\left(x - \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\right)^2}{2} =$$

$$= 1 - \frac{x^2 - 2x + xy^2 + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)^2}{2}$$

ja

$$f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 =$$

$$= 1 - \frac{\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)^2}{2} + x - \frac{xy^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} - 1 =$$

$$= 1 - \frac{x^2 - 2x + xy^2 + \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)^2}{2} .$$