1999.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bukarest (Rumeenia), 16.–17. juulil 1999

Esimene päev

1. Leia kõik tasandi niisugused lõplikud punktihulgad S, milles on vähemalt kolm elementi ja mille jaoks kehtib järgmine tingimus: iga kahe erineva punkti A ja B korral hulgast S on lõigu AB keskristsirge hulga S sümmeetriateljeks.

2. Olgu antud täisarv $n \geqslant 2$.

   a) Leia vähim niisugune konstant C, mille jaoks kõigi reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ korral kehtib võrratus

   $$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4 .$$

   b) Tee selle konstandi C korral kindlaks, millal kehtib võrdus.

3. Vaatleme $n \times n$ tabelit, kus n on fikseeritud positiivne paarisarv. Tabel jagatakse n^2 ühikruuduks. Ütleme, et kaks erinevat ruutu on *naabrid*, kui neil on ühine külg. Tabelis märgitakse N ruutu nõnda, et igal (nii märgitud kui märkimata) ruudul leidub vähemalt üks märgitud naaber. Leia arvu N vähim võimalik väärtus.

1999.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bukarest (Rumeenia), 16.–17. juulil 1999

Teine päev

4. Leia kõik niisugused positiivsete täisarvude paarid (n, p), et p on algarv, $n \leqslant 2p$ ning arv $(p-1)^n + 1$ jagub arvuga n^{p-1}.

5. Ringjooned Γ_1 ja Γ_2 asuvad ringjoone Γ sees ning puutuvad teda vastavalt erinevates punktides M ja N, kusjuures Γ_1 läbib Γ_2 keskpunkti. Ringjoonte Γ_1 ja Γ_2 kahte lõikepunkti ühendav sirge lõikab ringjoont Γ punktides A ja B. Sirged MA ja MB lõikavad ringjoont Γ_1 vastavalt punktides C ja D. Tõesta, et sirge CD on ringjoone Γ_2 puutuja.

6. Olgu $\mathbb{R}$ kõikide reaalarvude hulk. Leia kõik niisugused funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et mistahes reaalarvude x, y korral kehtib võrdus

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$