# 1998.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

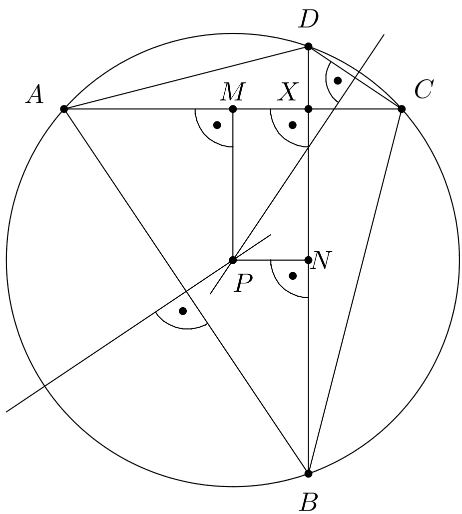
## Ülesannete lahendused

### Esimene päev

1. Olgu $X$ ülesande tingimustele vastava kumera nelinurga $ABCD$ diagonaalide $AC$ ja $BD$ lõikepunkt (vt. joonis 1). Olgu $H$ ja $K$ punktist $P$ vastavalt lõikudele $AC$ ja $BD$ tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Ülesande lahendamist hõlbustaks, kui kolmnurkade $ABP$ ja $CDP$ pindala õnnestuks avaldada mingite teiste, lihtsamini käsitletavate kolmnurkade pindalade kaudu.

   Vaatleme juhtu, kui punkt $P$ paikneb kolmnurga $ABX$ sisepiirkonnas või selle külgedel. Siis $S(ABP) = S(ABX) - S(APX) - S(BPX)$ ning $S(CDP) = S(CDX) + S(CPX) + S(DPX)$. Seega pindalade $S(ABP)$ ja $S(CDP)$ võrdsus on samaväärne sellega, et

$$S(ABX) - S(APX) - S(BPX) = S(CDX) + S(CPX) + S(DPX).$$




Joonis 1

Kolmnurkade $ABX$ ja $CDX$ täisnurksuse tõttu

$$S(ABX) = \frac{|AX| \cdot |BX|}{2}$$

ning

$$S(CDX) = \frac{|CX| \cdot |DX|}{2} .$$

Olgu $M$ kolmnurga $ABP$ alusele $AB$ tõmmatud kõrguse aluspunkt ja $N$ kolmnurga $CDP$ alusele $CD$ tõmmatud kõrguse aluspunkt. Sel juhul on kolmnurkade $ABP$ ja $CDP$ pindalade võrdsus samaväärne sellega, et

$$\begin{aligned}&|AX| \cdot |BX| - |AX| \cdot |MP| - |BX| \cdot |NP| = \\ &\qquad = |CX| \cdot |DX| + |CX| \cdot |MP| + |DX| \cdot |NP|,\end{aligned}$$

millest arvestades võrdusi $|AX| = |AM| + |MX|$, $|BX| = |BN| + |NX|$, $|CX| = |CM| - |MX|$ ja $|DX| = |DN| - |NX|$ saame

$$|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |DN|.$$

Analoogiline mõttekäik on arendatav ka teistel punkti $P$ paiknemise juhtudel: alati saame, et kolmnurkade $ABP$ ja $CDP$ pindalade võrdsus on samaväärne võrduse $|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |DN|$ kehtimisega.

Kui nüüd $ABCD$ on kõõlnelinurk, siis on punkt $P$ selle ümberringjoone keskpunkt ning $|AM| = |CM|$ ja $|CN| = |DN|$. Seega kehtib võrdus $|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |DN|$, millest eelpoolöeldu kohaselt järeldub, et $S(ABP) = S(CDP)$.

Teiselt poolt, kehtigu võrdus $S(ABP) = S(CDP)$. Kui $|PA| > |PC|$, siis $|AM| > |CM|$. Punkti $P$ konstruktsiooni kohaselt $|PA| = |PB|$ ja $|PC| = |PD|$, mis tähendab, et ka $|BN| > |DN|$. Sellisel juhul aga $|AM| \cdot |BN| > |CM| \cdot |DN|$, mis on vastuolus kolmnurkade $ABP$ ja $CDP$ pindalade võrdsusega. Analoogiliselt viib vastuoluni oletus $|PA| < |PC|$. Seega $|PA| = |PC|$, ehk $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$, järelikult on $ABCD$ kõõlnelinurk.

2. Leiame niisuguste kolmikute (kohtunik, kohtunik, osavõtja) arvu $N$, kus nimetatud kaks kohtunikku on erinevad ja annavad osavõtja esinemisele

sama hinnangu. Kokku on $\binom{b}{2} = \dfrac{b(b-1)}{2}$ kohtunikupaari, kusjuures iga paari kohtunikud hindavad samamoodi ülimalt $k$ osavõtjat, millest järeldub, et $N \leqslant \dfrac{kb(b-1)}{2}$.

Fikseerime nüüd osavõtja $X$ ja loendame niisuguseid kohtunikupaare, kus mõlemad kohtunikud annavad osavõtja $X$ esinemisele sama hinnangu. Hinnaku $x$ kohtunikku osavõtja $X$ esinemist heaks, siis on selliseid paare, kus mõlemad kohtunikud hindavad osavõtja $X$ esinemist heaks, $\binom{x}{2} = \dfrac{x(x-1)}{2}$ ning selliseid paare, kus mõlemad kohtunikud hindavad osavõtja $X$ esinemist halvaks, $\binom{b-x}{2} = \dfrac{(b-x)(b-x+1)}{2}$, niisiis kokku annavad täpselt $\dfrac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}$ paari mõlemad kohtunikud osavõtja $X$ esinemisele sama hinnangu. Saame, et

$$\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2} = \frac{2x^2-2bx+b^2-b}{2} =$$
$$= \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \geqslant \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Kuna $\dfrac{(b-1)^2}{4}$ on $b$ paarituarvulisuse tõttu täisarv, siis nende kohtunikupaaride arv, kus mõlemad kohtunikud annavad osavõtja $X$ esinemisele sama hinnangu, on vähemalt $\dfrac{(b-1)^2}{4}$.

Niisiis $\dfrac{a(b-1)^2}{4} \leqslant N \leqslant \dfrac{kb(b-1)}{2}$, mille arvuga $\dfrac{ab(b-1)}{2}$ läbijagamisel jõuame tõestatava võrratuseni.

3. *Vastus:* Kõik paaritud täisarvud.

*Lahendus:* Kirjutame positiivse täisarvu $n$ tema algtegurite korrutisena $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$, kus $p_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, on mingid algarvud, mis esinevad arvu $n$ tegurite hulgas arvust 0 suurema astendajaga $a_i$. Nagu teada, on siis arvu $n$ positiivsete jagajate arv $d(n) = \prod_{i=1}^{r}(a_1+1)$ ning arvu $n^2$ jagajate arv $d(n^2) = \prod_{i=1}^{r}(2a_1+1)$. Niisiis peavad arvud $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ olema nii valitud, et

$$k\prod_{i=1}^{r}(a_1+1) = \prod_{i=1}^{r}(2a_1+1). \tag{1}$$

Kuna kõik arvud $2a_i + 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, on paaritud, siis peab paaritu olema ka arv $k$. Näitame teiselt poolt, et mistahes paaritu positiivse täisarvu $k$ korral saame leida ülesande tingimusele vastavad arvud $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Kasutame nimetatud väite tõestamiseks matemaatilise induktsiooni meetodit. Kõigepealt, väide kehtib ilmselt $k = 1$ korral, kui võtame $n = 1$. Näitame nüüd, et kui väide kehtib $k$ korral, kehtib ta ka $2^m k - 1$ korral. Selle tõestamine on piisav, sest igal paaritut arvu saab esitada kujul $2^m k - 1$ mingi väiksema paaritu arvu $k$ korral.

Niisiis, leidugu mingi paaritu positiivse täisarvu $k$ korral positiivsed täisarvud $a_1, a_2, \ldots, a_r$ nii, et kehtib (1). Olgu antud mingi paaritu positiivne täisarv $2^m k - 1$. Võtame $a'_i = 2^i((2^m-1)k-1)$ iga $i = 0, 1, \ldots, m$ korral, siis $2a_i+1 = 2^{i+1}(2^m-1)k-(2^{i+1}-1)$ ning $a_i+1 = 2^i(2^m-1)k-(2^i-1)$ iga $i = 0, 1, \ldots, m$ korral. Niisiis

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(2a'_i+1)}{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(a'_i+1)} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(2^{i+1}(2^m-1)k-(2^{i+1}-1))}{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(2^i(2^m-1)k-(2^i-1))},$$

millest taandamisel saame

$$\frac{2^m(2^m-1)k-(2^m-1)}{(2^m-1)k} = \frac{2^m k-1}{k}.$$

Tähistame nüüd $a_{r+1} = a'_1$, $a_{r+2} = a'_2$, $\ldots$, $a_{r+m} = a'_m$ ja olgu $n'$ selline positiivne täisarv, mille algtegurite astendajateks on arvud

$a_1, a_2, \ldots, a_{r+m}$. Siis

$$\frac{d(n'^2)}{d(n')} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{r+m}(2a_i+1)}{\prod\limits_{i=1}^{r+m}(a_i+1)} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{r}(2a_i+1)\right)\left(\prod\limits_{i=0}^{m-1}(2a'_i+1)\right)}{\left(\prod\limits_{i=1}^{r}(a_i+1)\right)\left(\prod\limits_{i=0}^{m-1}(a'_i+1)\right)} =$$
$$= k \cdot \frac{2^m k - 1}{k} = 2^m k - 1.$$

Matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt leiame nüüd iga paaritu positiivse täisarvu $k$ korral vastavad arvud $a_i$ mingi positiivse täisarvu $n$ algtegurite astendajateks nii, et kehtiks (1).

## Teine päev

4. *Vastus:* $(11, 1)$, $(49, 1)$, $(7k^2, 7k)$, kus $k$ on positiivne täisarv.

*Lahendus:* Kui $a < b$, siis $b \geqslant a + 1$, mis tähendab, et

$$ab^2 + b + 7 > ab^2 + b \geqslant (a+1)(ab+1) = a^2b + a + ab \geqslant a^2b + a + b.$$

Niisiis sellel juhul lahendid puuduvad, seega võime edasises eeldada, et $a \geqslant b$.

Olgu $\dfrac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = k$ täisarv. Saame, et

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) = a^2b + a + 7 \cdot \frac{a}{b} + ab + 1 + 7 \cdot \frac{1}{b} >$$
$$> a^2b + a + b.$$

Niisiis $k < \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b}$. Kui nüüd $b \geqslant 3$, siis $b - \dfrac{7}{b} > 0$, millest

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) = a^2b + a - a\left(b - \frac{7}{b}\right) - 1 - \frac{7}{b} <$$
$$< a^2b + a < a^2b + a + b.$$

Seega kas $b = 1$, $b = 2$ või $k > \frac{a}{b} - \frac{1}{b}$.

Juhul $\frac{a}{b} - \frac{1}{b} < k < \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$ on $a - 1 < kb < a + 1$, millest $a = kb$. Siit saame lahendi $(a, b) = (7k^2, 7k)$; et saavutada täisarvu $7k$ positiivsust, peame siin täiendavalt eeldama, et $k > 0$.

Vaatleme juhtu $b = 1$. Saame, et arv $a^2 + a + 1$ jagub arvuga $a + 8$, niisiis jagub arvuga $a + 8$ arv $a(a + 8) - (a^2 + a + 1) = 7a - 1$ ning ka arv $7(a + 8) - (7a - 1) = 57$. Arvu 57 ainsad arvu 8 ületavad jagajad on 19 ja 57, siit saame, et $a = 11$ või $a = 49$. On lihtne kontrollida, et $(a, b) = (11, 1)$ ja $(a, b) = (49, 1)$ on tõepoolest lahenditeks.

Vaatleme lõpuks juhtu $b = 2$. Sel juhul jagub arv $2a^2+a+2$ arvuga $4a+9$, niisiis jagub viimasega veel arv $a(4a+9)-2(2a^2+a+2) = 7a-4$, samuti ka arv $7(4a+9) - 4(7a-4) = 79$. Arvu 79 ainus arvust 9 suurem jagaja on 79, kuid siis $a = \frac{35}{2}$, mis pole täisarv. Seega sellel juhul lahendid puuduvad.

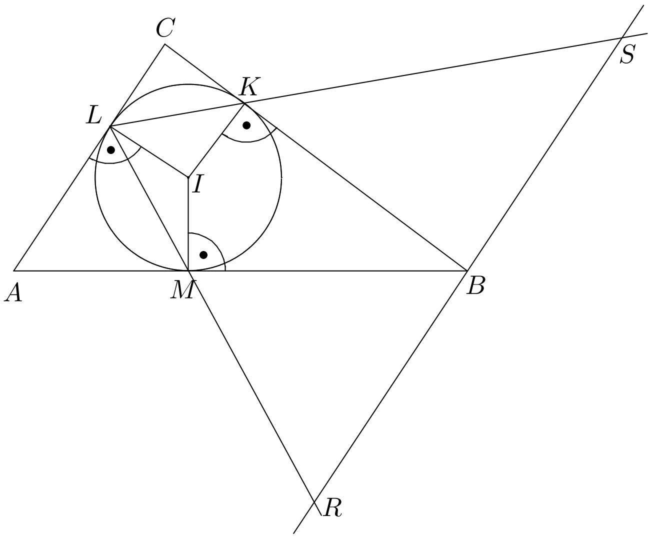
Seega saime kokkuvõttes lahendid $(7k^2, 7k)$, kus $k$ on positiivne täisarv, ning $(11, 1)$ ja $(49, 1)$.

5. Näitame, et $|RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 > 0$, siis koosinusteoreemi abil järeldub siit, et $\cos \angle RIS > 0$, mis tähendab, et $\angle RIS$ on teravnurk.

   Kuna sirge $BI$ läbib kolmnurga $ABC$ siseringjoone keskpunkti (vt. joonis 2), siis on ta risti sirgega $MK$, seega ka sirgega $RS$. Niisiis Pythagorase teoreemist $|IR|^2 = |BR|^2 + |BI|^2$ ja $|IS|^2 = |BI|^2 + |BS|^2$. Et $|RS| = |RB| + |BS|$, siis $|RS|^2 = |BR|^2 + |BS|^2 + 2|BR| \cdot |BS|$. Seega

$$|RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 = 2|BI|^2 - 2|BR| \cdot |BS|.$$

   Vaatleme kolmnurka $BMR$. Siin $\angle MBR = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ABC}{2}$. Kuna $\angle AIM = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$ ning sirge $LM$ on kolmnurga $ABC$ siseringjoone keskpunkti $I$ läbiva sirgega $AI$ risti, siis $\angle BMR = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$. Seega $\angle MRB = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ACB}{2}$.




Joonis 2

Nüüd siinusteoreemist $\dfrac{|BR|}{|BM|} = \dfrac{\cos\dfrac{\angle BAC}{2}}{\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}$. Analoogiliselt saame kolmnurgast $BKS$, et $\dfrac{|BS|}{|BK|} = \dfrac{\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{\cos\dfrac{\angle BAC}{2}}$. Niisiis

$$|BR| \cdot |BS| = |BM| \cdot |BK| = |BK|^2,$$

sest $\angle IBM = \angle IBK$ ja $|IM| = |IK|$, seega on kolmnurgad $IBM$ ja $IBK$ kongruentsed.

Jäänud on vaid märkida, et

$$|RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 = 2(|BI|^2 - |BK|^2) = 2|IK|^2 > 0.$$

6. *Vastus:* 120.

*Lahendus:* Tähistame $f(1) = k$. Siis $f(kt^2) = f(t)^2$ mistahes $t \in \mathbb{N}$ korral, ja $f(f(t)) = k^2 t$. Samuti

$$\begin{aligned} f(kt)^2 &= 1 \cdot f(kt)^2 = f(k^3 t^2) = f(1^2 \cdot kt^2 \cdot k^2) = f(f(1 \cdot f(kt^2))) = \\ &= f(1^2 \cdot f(f(kt^2))) = f(kt^2) \cdot k^2 = k^2 f(t)^2, \end{aligned}$$

millest $f(kt) = kf(t)$.

Näitame matemaatilise induktsiooni meetodil, et $k^n f(t^{n+1}) = f(t)^{n+1}$. Tõepoolest, juhul $n = 1$ on $f(t)^2 = f(kt^2) = kf(t^2)$. Juhul $n = 2$ on

$$k^2 f(t^3) = f(t^2 \cdot kt^2) = f(t^2 f(f(t))) = f(t) \cdot f(t)^2 = f(t)^3 .$$

Kehtigu nüüd tõestatav võrdus mingi naturaalarvu $n - 2$ korral, siis naturaalarvu $n$ puhul

$$\begin{aligned} k^n f(t^{n+1}) &= k^{n-2} f(t^2 k^2 t^{n-1}) = k^{n-2} f(t^2 f(f(t^{n-1}))) = \\ &= k^{n-2} f(t^{n-1}) f(t)^2 = f(t)^{n-1} f(t)^2 = f(t)^{n+1}. \end{aligned}$$

Siit järeldub, et arv $f(t)$ jagub arvuga $k$. Tõepoolest, olgu algarvu $p$ suurima astme, millega jagub arv $k$, näitaja $a$ ja sellesama algarvu suurima astme, millega jagub arv $f(t)$, näitaja $b$. Oletame vastuväiteliselt, et $a > b$, siis $a > b\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ mingi naturaalarvu $n$ korral. Ent sel juhul $na > (n + 1)b$, millest järeldub, et arv $f(t)^{n+1}$ ei jagu arvuga $k^n$, vastuolu.

Olgu siis $g(t) = \dfrac{f(t)}{k}$. Sel juhul

$$f(t^2 f(s)) = f(t^2 kg(s)) = kf(t^2 g(s)) = k^2 g(t^2 g(s)) .$$

Samuti $f(t^2 f(s)) = sf(t)^2 = k^2 sg(t)^2$, millest $g(t^2 g(s)) = sg(t)^2$. Seega rahuldab ka funktsioon $g$ ülesandes antud tingimust, funktsiooni $g$ väärtused pole aga ilmselt suuremad kui funktsiooni $f$ väärtused. Kuna kehtib $g(1) = 1$ ja otsime $f(1998)$ vähimat võimalikku väärtust, siis võime vaadelda vaid niisuguseid funktsioone $f$, mille korral $f(1) = 1$.

Nüüd lihtsustuvad eelnevalt saadud võrdused $f(f(t)) = t$ ja $f(t^2) = f(t)^2$. Siit järeldub, et

$$f(st)^2 = f(s^2t^2) = f(s^2 f(f(t^2)) = f(s)^2 f(t^2) = f(s)^2 f(t)^2 ,$$

mis tähendab, et $f(st) = f(s)f(t)$.

Olgu $p$ algarv ja $f(p) = mn$. Siis $f(m)f(n) = f(mn) = f(f(p)) = p$, järelikult peab üks arvudest $f(m)$ ja $f(n)$ võrduma arvuga 1. Ent kui $f(m) = 1$, siis $m = f(f(m)) = f(1) = 1$. Niisiis on $f(p)$ algarv. Kui $f(p) = q$, siis $f(q) = p$ mistahes algarvude $p$ ja $q$ korral.

Võime defineerida funktsiooni $f$ suvaliselt, jälgides ainult, et mistahes algarvu $p$ korral oleks ka $f(p)$ algarv, ning mistahes algarvude $p$ ja $q$ korral järelduks võrdusest $f(p) = q$, et $f(q) = p$. Tõepoolest, olgu $s = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, kus algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_n$ on täpselt need, mis esinevad arvu $s$ kanoonilises kujus. Olgu $f(p_i) = q_i$ ja $f(q_i) = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Kui arvu $t$ kanoonilises kujus esineb veel mingeid arvudest $q_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ erinevaid algarve, olgu need $q_j$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$ $(r \leqslant s)$, siis defineerime täiendavalt mingite arvudest $p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ erinevate algarvude $p_j$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$ puhul $f(p_j) = q_j$, $f(q_j) = p_j$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$. Nüüd $t^2 f(s) = q_1^{2b_1+a_1} q_2^{2b_2+a_2} \ldots q_s^{2b_s+a_s}$, millest

$$f(t^2 f(s)) = p_1^{2b_1+a_1} p_2^{2b_2+a_2} \ldots p_s^{2b_s+a_s} = s f(t)^2 .$$

Otsides avaldise $f(1998)$ minimaalset väärtust, peame silmas, et $1998 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$ ning defineerime $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(37) = 5$ ja $f(5) = 37$. Siis $f(1998) = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$. Pidades silmas asjaolu, et funktsioon $f$ rahuldab tingimust $f(mn) = f(m)f(n)$ mistahes naturaalarvude $m$ ja $n$ korral, ning asjaolu, et algarvulise $p$ korral peab $f(p) = q$ olema algarv ja $f(q) = p$, näeme, et oleme tõepoolest saanud avaldise $f(1998)$ vähima võimaliku väärtuse.