1998.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Taipei (Taivan), 15.–16. juulil 1998

Esimene päev

1. Kumeras nelinurgas $ABCD$ on diagonaalid AC ja BD risti ning vastasküljed AB ja DC ei ole paralleelsed. Külgede AB ja DC keskristsirgete lõikepunkt P paikneb nelinurga $ABCD$ sisepiirkonnas. Tõesta, et $ABCD$ on kõõlnelinurk siis ja ainult siis, kui kolmnurgad ABP ja CDP on võrdse pindalaga.

2. Võistlusel on a osavõtjat ja b kohtunikku, kusjuures $b \geqslant 3$ on paaritu arv. Iga kohtunik hindab iga osavõtja esinemist „heaks" või halvaks. On teada, et mistahes kahe kohtuniku hinnangud langevad kokku ülimalt k osavõtja korral. Tõesta, et

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

3. Tähistagu $d(n)$ positiivse täisarvu n positiivsete jagajate arvu (1 ja n kaasa arvatud). Leia kõik positiivsed täisarvud k, mille jaoks leidub selline arv n, et

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

1998.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Taipei (Taivan), 15.–16. juulil 1998

Teine päev

4. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral arv $a^2b + a + b$ jagub arvuga $ab^2 + b + 7$.

5. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning puutugu siseringjoon kolmnurga ABC külgi BC, CA ja AB vastavalt punktides K, L ja M. Sirge, mis on tõmmatud läbi tipu B paralleelselt sirgega MK, lõikab sirgeid LM ja LK vastavalt punktides R ja S. Tõesta, et $\angle RIS$ on teravnurk.

6. Vaatleme kõikvõimalikke funktsioone f positiivsete täisarvude hulgast $\mathbb{N}$ sellessesamasse hulka, mis rahuldavad iga $s, t \in \mathbb{N}$ korral tingimust

   $$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2.$$

   Leia $f(1998)$ vähim võimalik väärtus.