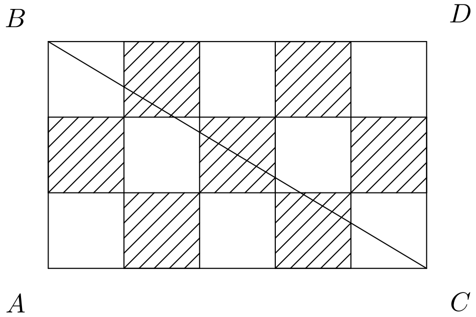
1997.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. (a) Olgu ABC täisnurkne kolmnurk, mille tipud on täisarvuliste koordinaatidega, täisnurga tipp A ning küljed $AB = m$ ja $AC = n$ paiknevad piki ruutude servi. Vaatleme $m \times n$ ristkülikut $ABDC$ (vt. joonis 1).



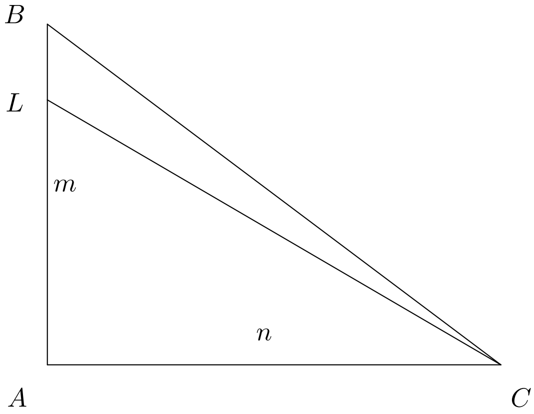
Joonis 1

Tähistame mistahes hulknurga P korral tähega $S_m(P)$ selle hulknurga musta (viirutatud) ning tähega $S_v(P)$ valge pinnaosa pindala. Kui arvud m ja n on sama paarsusega, siis on ristkülik $ABDC$ sümmeetriline lõigu BC keskpunkti suhtes. Seega $S_m(ABC) = S_m(BCD)$ ja $S_v(ABC) = S_v(BCD)$. Niisiis

$$f(m,n) = |S_m(ABC) - S_v(ABC)| = \frac{1}{2}|S_m(ABDC) - S_v(ABDC)|.$$

Siit järeldub, et $f(m,n) = 0$, kui arvud m ja n on paarisarvud, ning $f(m,n) = \dfrac{1}{2}$, kui arvud m ja n on paaritud.

(b) Kui arvud m ja n on sama paarsusega, siis järeldub tõestatav võrratus ülesande (a)-osa lahendusest. Olgu siis üldisust kitsendamata arv m paaritu ning arv n paarisarv. Vaatleme punkti L lõigul AB valituna nii, et $|AL| = m - 1$ (vt. joonis 2).



Joonis 2

Kuna arv $m - 1$ on paarisarv, siis $f(m-1, n) = 0$, millest saame $S_m(ALC) = S_v(ALC)$. Seega

$$\begin{aligned} f(m,n) &= |S_m(ABC) - S_v(ABC)| = |S_m(LBC) - S_v(LBC)| \leqslant \\ &\leqslant S(LBC) = \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max(m,n). \end{aligned}$$

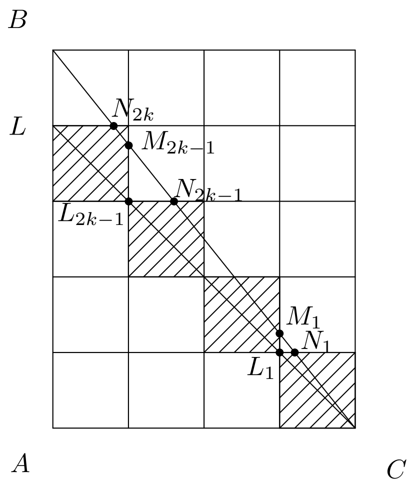
(c) Avaldame $f(2k+1, 2k)$. Nagu lahenduse (b)-osas, valime punkti L lõigul AB nii, et $|AL| = 2k$ (vt. joonis 3). Kuna $f(2k, 2k) = 0$ ning $S_m(ALC) = S_v(ALC)$, siis saame, et

$$f(2k+1, 2k) = |S_m(LBC) - S_v(LBC)| \,.$$

Olgu kolmnurga LBC pindala k. Eeldame üldisust kitsendamata, et diagonaal LC paikneb mustadel ruutudel. Siis koosneb kolmnurga LBC valget värvi pinnaosa kolmnurkadest BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, $\ldots$, $M_1L_1N_1$, kusjuures kõik need kolmnurgad on sarnased kolmnurgaga BAC. Nimetatud kolmnurkade kogupindala on

$$S_v(LBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdot \left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots \left(\frac{1}{2k}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2) =$$
$$= \frac{(2k(2k+1)(4k+1)}{4k(2k+1) \cdot 6} = \frac{4k+1}{12}.$$



Joonis 3

Seega

$$S_m(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}.$$

Nüüd

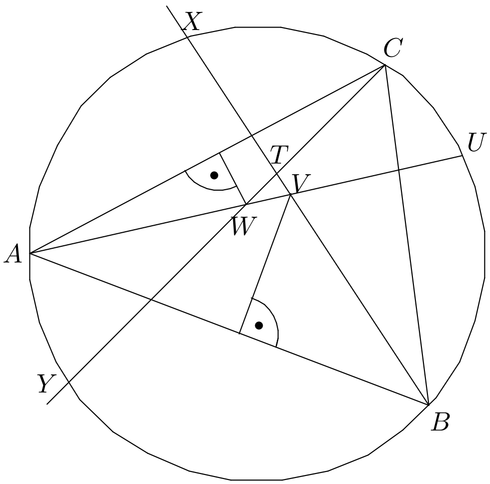
$$f(2k+1, 2k) = \left| \frac{8k-1}{12} - \frac{4k+1}{12} \right| = \frac{2k-1}{6}.$$

Saadud avaldise väärtus võib olla kuitahes suur.

Märkus: Saab näidata, et funktsiooni kuitahes $f(m,n)$ suuri väärtusi saame vaid juhul, kui arvud m, n on erineva paarsusega ning omavahel ühistegurita. Viimane järeldub asjaolust, et kui üldisust kitsendamata arv m on paaritu ja arv n paarisarv, $d = \gcd(m,n) > 1$, siis

$$f(m,n) = f\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right).$$

2. Pikendame lõike BV ja CW vastavalt üle punktide V ja W lõikumiseni ringjoonega vastavalt punktides X ning Y (vt. joonis 4).



Joonis 4

Et kõõl BX on kõõlu AU peegeldus külje AB keskristsirge suhtes, siis $|AU| = |BX|$. Analoogiliselt – kuna kõõl CY on kõõlu AU peegeldus külje AC keskristsirge suhtes, siis $|AU| = |CY|$. Nendesamade peegelduse tõttu $\overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{UB}$ ning $\overset{\frown}{AY} = \overset{\frown}{UC}$.

Siit $\overset{\frown}{XY} = \overset{\frown}{BC}$, mis tähendab, et $\angle BYC = \angle XBY$ ning $|TY| = |TB|$. Niisiis $|AU| = |CY| = |CT| + |TY| = |CT| + |TB|$.

3. Olgu hulga $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mistahes permutatsiooni $\pi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ korral $S(\pi)$ summat $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$. Olgu $r = \dfrac{n+1}{2}$; tarvis on näidata, et $|S(\pi)| \leqslant r$ mingi permutatsiooni π korral.

Olgu loomulik permutatsioon $\pi_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ning tagurpidine permutatsioon $\tilde{\pi} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$. Kui $|S(\pi_0)| \leqslant r$ või $|S(\tilde{\pi})| \leqslant r$, siis tõestatav väide kehtib. Eeldame siis edasises, et $|S(\pi_0)| > r$ ning $|S(\tilde{\pi})| > r$.

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) &= (x_1+2x_2+\ldots+nx_n) + (x_n+2x_{n-1}+\ldots+nx_1) = \\ &= (n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)\ , \end{aligned}$$

millest $|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n+1 = 2r$. Kuna kumbki arvudest $S(\pi_0)$ ning $S(\tilde{\pi})$ ületab absoluutväärtuselt arvu r, peavad nimetatud arvud olema erimärgilised. Teisi sõnu, üks arvudest $S(\pi_0)$ ja $S(\tilde{\pi})$ on suurem kui arv r ning teine väiksem kui arv $-r$.

Lähtudes permutatsioonist π_0, võime mistahes permutatsiooni saada järjestikusel kõrvutiste elementide vahetamisel. Muuhulgas leidub siis permutatsioonide jada $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ nii, et $\pi_m = \tilde{\pi}$ ning mistahes $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ korral on permutatsioon π_{i+1} saadud permutatsioonist π_i mingi kahe kõrvutise elemendi vahetamisel.

See tähendab, et kui $\pi_i = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ning $\pi_{i+1} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, siis leidub indeks $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nii, et $z_k = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_k$ ja $z_j = y_j$ mistahes $j \neq k, k+1$ korral.

Kuna arvud x_i ei ületa absoluutväärtuselt arvu r, siis

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leqslant |y_k| + |y_{k+1}| \leqslant 2r. \end{aligned}$$

Niisiis pole erinevus kahe järjestikuse arvu vahel jadas $S(\pi_0)$, $S(\pi_1)$, $\ldots$, $S(\pi_m)$ suurem kui $2r$.

Meenutame nüüd, et arvud $S(\pi_0)$ ja $S(\pi_m)$ vaadelduna reaalsirge punktidena asuvad väljaspool lõiku $[-r, r]$, nullpunktist teine teisel pool. Pidades silmas eelpooltõestatut, peab vähemalt üks arvudest $S(\pi_i)$ langema sellesse lõiku. Seega $|S(\pi_i)| \leqslant r$ mingi permutatsiooni π_i korral.

Teine päev

4. (a) Olgu $n > 1$ täisarv. Oletame, et leidub $n \times n$ hõbedane maatriks A. Fikseerime hulga {1, 2, ..., 2n-1} mingi elemendi x, mis ei esine

maatriksi A peadiagonaalil (niisugune element leidub, sest maatriksi A peadiagonaalil on vaid n elementi, aga nimetatud hulgas on $2n-1$ elementi). Nimetame i-nda rea ja i-nda veeru elementide hulka i-ndaks *ristiks*. Ilmselt leidub element x igas ristis täpselt üks kord. Kui element x paikneb maatriksi A i-ndas reas j-ndas veerus, siis leidub ta nii i-ndas kui ka j-ndas ristis. Nimetame neid riste *x-seotuks*.

Nüüd saab kõik n risti jagada x-seotud paarideks, millest n paarisarv. Ent arv 1997 on paaritu.

(b) Juhul $n=2$ on maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hõbedane. Juhul $n=4$ on hõbedased näiteks maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Maatriksi A konstruktsiooni saab üldistada. Eeldame, et leidub $n \times n$ hõbedane maatriks A; siis saab $2n \times 2n$ hõbedase maatriksi D konstrueerida järgnevalt:

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix},$$

kus B on $n \times n$ maatriks, mis on saadud maatriksist A igale tema elemendile arvu $2n$ liitmisel, ja C on maatriksi B peadiagonaali elementide asendamisel arvuga $2n$ saadud maatriks.

Tõestame, et maatriks D on samuti hõbedane. Vaatleme maatriksi D i-ndat risti ja eeldame, et $i \leqslant n$; juhtu $i \geqslant n$ käsitletakse analoogiliselt. See rist koosneb maatriksi A i-nda risti elementidest, maatriksi B i-nda rea ning maatriksi C i-nda veeru elementidest. Teame, et maatriksi A i-nes rist on hulk $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Maatriksi B i-nda rea ning maatriksi C i-nda veeru elementide hulga ühend on aga $\{2n, 2n+1, \ldots, 4n-1\}$.

5. *Vastus:* $(1,1)$, $(27,3)$ ja $(16,2)$.

Lahendus: Olgu täisarvupaar (x, y) antud võrrandi lahend ning olgu $d = \gcd(x, y)$. Olgu $x = du$ ja $y = dv$; siis täisarvud u ja v on ühistegurita. Antud võrrand on nendes tähistustes samaväärne järgmisega:

$$(du)^{dv^2} = (dv)^u. \tag{1}$$

Astendajate dv^2 ja u võrdlemisel võrrandis (1) vaatleme kolme juhtu.

1) Juhul $dv^2 = u$ saame võrrandist (1) $u = v$. Et arvud u, v on ühistegurita, siis $u = v = 1$; võrdusest $dv^2 = u$ saame, et $d = 1$. Niisiis $x = y = 1$, mis on lähtevõrrandi lahendiks.

2) Juhul $dv^2 > u$ saame võrrandi (1) kirjutada kujul $d^{dv^2-u} \cdot u^{dv^2} = v^u$. Näeme, et arv v^u jagub arvuga u^{dv^2}. Et arvud u, v on ühistegurita, siis $u = 1$ ning saame, et

$$d^{dv^2-1} = v. \tag{2}$$

Kui $d = 1$, siis võrrandist (2) $v = 1$ ning võrratus $dv^2 > u$ ei kehti. Kui aga $d \geqslant 2$, siis $d^{dv^2-1} \geqslant 2^{2v^2-1} \geqslant 2^{2v-1} > v$. Ahelvõrratuse viimase võrratuse saame kergesti tõestada induktsiooni teel. Kui $v = 1$, siis $2^{2v-1} = 2 > v$. Kehtigu nüüd mingi täisarvu $w \geqslant 1$ korral $2^{2w-1} > w$. Siis $2^{2(w+1)-1} = 2^{2w-1} \cdot 2^2 > 4w > w + 1$.

Seega puuduvad lähtevõrrandil juhul $dv^2 > u$ lahendid.

3) Juhul $dv^2 < u$ näeme, et $u > d$; võrrandi (1) saame kirjutada kujul $u^{dv^2} = d^{u-dv^2} \cdot v^u$. Näeme, et arv u^{dv^2} jagub arvuga v^u. Kuna arvud u, v on ühistegurita, siis $v = 1$ ning saame

$$u^d = d^{u-d}. \tag{3}$$

Et $u > d$, siis võrrandis (3) astmete alused $d < u-d$. Võrrandi (3) põhjal on arvu d mistahes algarvuline jagaja p on ka arvu u jagaja. Tähistades tähtedega α ja δ suurimad astendajad, mille korral $p^\alpha | u$, $p^\delta | d$, saame võrrandist (3) $\alpha d = \delta(u - d)$, millest $\alpha > \delta$. Niisiis jagub arv u arvuga d, seega $u = kd$ mingi täisarvu k korral. Kuna $u > 2d$, siis $k \geqslant 3$. Asendades $u = kd$ võrrandisse (3), saame

$$k = d^{k-2}. \tag{4}$$

Niisiis $d \neq 1$.

Kui $k = 3$, siis võrrandist (4) $d = 3$, millest $u = 9$, $x = 27$, $y = 3$.

Kui $k = 4$, siis võrrandist (4) $d^2 = 4$, millest $d = 2$, $u = 8$, $x = 16$, $y = 2$.

Kui $k \geqslant 5$, siis $d^{k-2} \geqslant 2^{k-2} > k$. Viimase võrratuse tõestame matemaatilise induktsiooni teel. Juhul $k = 5$ $2^{k-2} = 8 > k$. Kehtigu nüüd mingi täisarvu $k = l \geqslant 5$ korral $2^{k-2} > k$; kui $k = l + 1$, siis $2^{k-2} = 2^{l-1} = 2 \cdot 2^{l-2} > 2l > l + 1 = k$.

Niisiis on lähtevõrrandil kolm lahendit: $(1, 1)$, $(27, 3)$ ning $(16, 2)$.

6. *Lahendus 1:* Kui $n = 2k+1$ on mistahes arvust 1 erinev paaritu täisarv, siis igas arvu n esituses summana leidub ühe liidetavana arv 1. Selle liidetava eemaldamisel saame arvu $2k$ mingi esituse summana. Teiselt poolt, liites arvu $2k$ mingile esitusele summana arvu 1, saame arvu $2k+1$ mingi esituse summana. Tekkinud üksühese vastavuse kohaselt

$$f(2k + 1) = f(2k). \tag{5}$$

Kui arv $n = 2k$ on mingi positiivne paarisarv, siis arvu n iga esitus summana kas sisaldab või ei sisalda liidetavana arvu 1. Esimesel juhul saame selle liidetava eemaldamisel arvu $2k - 1$ mingi esituse summana, analoogiliselt eelmises lõigus märgituga ka vastupidi, seega tekkis siin samuti üksühene vastavus. Teisel juhul saame aga kõik nimetatud esituse liidetavad jagada läbi arvuga 2, saades arvu k mingi esituse summana. Ka siin on tegemist üksühese vastavusega. Niisiis

$$f(2k) = f(2k - 1) + f(k). \tag{6}$$

Mõlemad saadud võrdused kehtivad mistahes positiivse täisarvu k korral. Ilmselt $f(1) = 1$; defineerides täiendavalt $f(0) = 1$, kehtib võrdus (5) ka $k = 0$ korral. Võrdustest (5) ja (6) järeldub, et funktsioon f on mittekahanev.

Võrduse (5) kohaselt saab võrduse (6) liikme $f(2k-1)$ asendada liikmega $f(2k - 2)$, seega kehtib $f(2k) - f(2k - 2) = f(k)$ mistahes positiivse täisarvu k korral.

Võtame nüüd mingi positiivse täisarvu n ja liidame viimatisaadud võrdused $k = 1, 2, \ldots, n$ korral. Saame, et

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n). \tag{7}$$

Hindame jada $(f(2^n))_{n=1}^{\infty}$ liikmeid ülevalt ja alt. Ülemise hinnangu saamiseks paneme tähele, et võrduses (7) pole ükski liidetav suurem kui viimane $(f(n))$. Kuna $2 = f(2) \leqslant f(n)$ mistahes positiivse täisarvu $n \geqslant 2$ korral, siis

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + f(3) + \ldots + f(n)) \leqslant 2 + (n-1)f(n) \leqslant \\ &\leqslant f(n) + (n-1)f(n) = nf(n). \end{aligned}$$

mistahes positiivse täisarvu $n \geqslant 2$ korral.

Järelikult

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leqslant 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant \ldots \leqslant 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2. \end{aligned}$$

Et aga $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ mistahes positiivse täisarvu $n \geqslant 3$ korral, siis oleme leidnud nimetatud jada liikmetele ülemise hinnangu.

Alumise hinnangu saamine on mõnevõrra keerukam. Näitame kõigepealt, et

$$f(b+1) - f(b) \geqslant f(a+1) - f(a) \tag{8}$$

mistahes sama paarsusega mittenegatiivsete täisarvude a ja b, $a \leqslant b$ korral.

Tõepoolest, kui a ja b on paarisarvud, siis võrduse (5) kohaselt on tõestatava võrratuse (8) mõlemal poolel nullid; kui aga a ja b on paaritud arvud, siis võrdusest (6) $f(b+1) - f(b) = f\left(\dfrac{b+1}{2}\right)$ ja $f(a+1) - f(a) = f\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$, nüüd kehtib võrratus (8) funktsiooni f mittekahanevuse tõttu.

Võtame nüüd mistahes täisarvud r ja k, $r \geqslant k \geqslant 1$, kus r on paarisarv, ning asendame võrratuses (8) arvud $a = r - j$ ja $b = r + j$, kus $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Siis liidame saadud võrratused, saame

$$f(r+k) - f(r) \geqslant f(r+1) - f(r-k+1).$$

Kuna r on paarisarv, on $f(r+1)=f(r)$ ning seega

$$f(r+k)+f(r-k+1)\geqslant 2f(r)$$

mistahes $k = 1,2,\ldots,r$ korral. Liites saadud võrratused üle kõigi võimalike arvude $k=1,2,\ldots,r$, saame

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2r)\geqslant 2rf(r).$$

Pidades silmas võrdust (7), on saadud võrratuse parem pool võrdne arvuga $f(4r)-1$. Niisiis

$$f(4r)\geqslant 2rf(r)+1>2rf(r)$$

mistahes täisarvu $r\geqslant 2$ korral.

Võttes $r=2^{m-2}$, saame

$$f(2^m)>2^{m-1}f(m-2). \tag{9}$$

Kindlustamaks, et arv $r=2^{m-2}$ on paarisarv, peab arv m olema arvust 2 suurem täisarv; siiski kehtib võrratus (9) ka $m=2$ korral.

Tõestuse lõpetamiseks olgu n suvaline arvust 1 suurem täisarv. Kui l on positiivne täisarv nii, et $2l\leqslant n$, siis kasutades võrratust (9) $m=n$, $n-1$, $\ldots$, $n-2l+2$ jaoks saame

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1}\cdot f(2^{n-2})>2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-4})>\ldots> \\ &> 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)}\cdot f(n-2l)=2^{l(n-l)}\cdot f(2^{n-2l}). \end{aligned}$$

Kui n on paarisarv, siis võtame $l=\dfrac{n}{2}$; kui aga n on paaritu arv, võtame $l=\dfrac{n-1}{2}$. Siis esimesel juhul $f(2^n)>2^{\frac{n^2}{4}}\cdot f(2^0)=2^{\frac{n^2}{4}}$ ja teisel juhul $f(2^n)>2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot f(2^1)=2^{\frac{n^2-1}{4}}\cdot 2>2^{\frac{n^2}{4}}$.

Seega iga täisarvu $n\geqslant 2$ korral $f(2^n)>2^{\frac{n^2}{4}}$.

Märkus: Vahetult saab veenduda, et saadud alumine hinnang kehtib ka $n=1$ korral.

Lahendus 2: Et kuidagi eristada arve endid ja nende esitusi arvu 2 astmete summadena, vaatleme nimetatud esitusi lõpmatute jadadena mittenegatiivsetest täisarvudest, kusjuures need jadad sisaldavad vaid lõpliku arvu mittenulliseid liikmeid. Ütleme, et jada

$$\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots) \tag{10}$$

on täisarvu n *esitus*, kui

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_s 2^s + \ldots \tag{11}$$

Lühiduse huvides tähistame võrrandi (11) parema poole tähega $S(\alpha)$. Siis saab nimetatud võrrand kuju $n = S(\alpha)$ ning S on funktsioon, mis vastavalt etteantud jadale α leiab arvu, mida see jada esitab. Defineerime ka jadade elementhaaval liitmise: jadade $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots)$ ja $\beta = (b_0, b_1, \ldots, b_s, \ldots)$ puhul olgu

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_s + b_s, \ldots).$$

Niiviisi defineerituna vastab jadade liitmine vastavate täisarvude liitmisele, see tähendab

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta).$$

On teada, et mistahes positiivne täisarv n on esitatav üheselt kujul $n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_s 2^s$, kus mistahes $i = 0, 1, \ldots, s$ korral kas $a_i = 0$ või $a_i = 1$. Sellist arvu n esitust tähistame

$$\mathrm{bin}(n) = (a_0, a_1, \ldots, a_s, 0, 0).$$

Saame avaldise $f(2^n)$ ülemise hinnangu. Kõigepealt tõestame, et kehtib

$$f(2^n) \leqslant 2^{n-1} f(2^{n-1}) + 1. \tag{12}$$

Vaatleme arvu 2^n mistahes esitust $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots)$. Märkame, et a_0 on paarisarv, vastasel korral peaks arv 2^n olema paaritu. Vaatleme ka arvu 2^{n-1} esitust $\alpha' = (\frac{a_0}{2} + a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, \ldots)$. Uurime, kui palju arvu 2^n esitusi vastab arvu 2^{n-1} mistahes esitusele $\beta = (b_0, b_1, \ldots, b_s, \ldots)$, mis erineb esitusest $(2^{n-1}, 0, 0, \ldots)$.

Kõik nimetatud arvu 2^n esitused on kujul $(x, y, b_1, \ldots, b_s, \ldots)$. Loomulikult ei ole elemendid x ja y sõltumatud: kui valime elemendi x, on määratud ka element y. Kuna arv x peab olema paarisarv, pole selle valikuks rohkem kui 2^{n-1} võimalust. Niisiis vastab arvu 2^{n-1} mingile etteantud esitusele β γ arvu 2^n esitust selles mõttes, et $\gamma' = \beta$. Pidades silmas ka esitust $(2^{n-1}, 0, 0, \ldots)$, saame, et arvu 2^{n-1} mistahes esitusele vastab ülimalt $2^{n-1}+1$ arvu 2^n esitust. Viimane väide tõestab võrratuse (12).

Ilmselt $f(2^3) = 10 \leqslant 256\sqrt{2} = 2^{\frac{3^2}{2}}$. Eeldades, et ülesandes antud hinnang kehtib arvu $n-1$ jaoks, saame

$$f(2^n) \leqslant 2^{n-1} f(2^{n-1}) + 1 < 2^{(n-1)+\frac{(n-1)^2}{2}} + 1 < 2^{\frac{n^2}{2}},$$

see tähendab nimetatud hinnangu kehtivuse ka arvu n korral. Matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt kehtib saadud hinnang iga positiivse täisarvu $n \geqslant 3$ korral.

Saame nüüd avaldisele $f(2^n)$ ka alumise hinnangu. Tõestame, et

$$f(2^{n+3}) \geqslant 2^{2n-1} f(2^n). \tag{13}$$

Selleks konstrueerime arvu 2^{n+3} 2^{2n-1} erinevat esitust, lähtudes arvu 2^n esitusest $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots)$.

Pidades silmas võrdust $2^{n+3} = 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^{n+1}$, leiame selle parema poole iga liidetava esituse. Jada $\beta(\alpha) = (0, 0, a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots)$ on esimese liidetava esitus. Tõepoolest, $S(\beta(\alpha)) = 4S(\alpha) = 2^{n+2}$.

Ülejäänud kaks liidetavat esitame järgmiselt. Olgu

$$\gamma(x) = (0, x, 0, 0, \ldots) + \operatorname{bin}(2^{n+1} - 2x)$$

ning

$$\delta(x) = (y, 0, 0, 0, \ldots) + \operatorname{bin}(2^{n+1} - y),$$

kus $0 \leqslant x \leqslant 2^n$ ja $0 \leqslant y \leqslant 2^{n+1}$ on mõlemad paarisarvud. Siis $S(\gamma(x)) = 2x + (2^{n+1} - 2x) = 2^{n+1}$ ning $S(\delta(y)) = y + (2^{n+1} - y) = 2^{n+1}$. Seega on $F(\alpha, x, y) = \beta(\alpha) + \gamma(\alpha) + \delta(\alpha)$ arvu 2^{n+3} esitus.

Paneme tähele, et $2^{n+1} - 2x \equiv 0 \pmod 4$, millest

$$\operatorname{bin}(2^{n+1} - 2x) = (0, 0, g_2, g_3, \ldots)$$

ning $\gamma(x) = (0, x, g_2, g_3, \ldots)$. Analoogiliselt, $2^{n+1} - y \equiv 0 \pmod 2$, seega

$$\mathrm{bin}(2^{n+1} - y) = (0, d_1, d_2, d_3, \ldots)$$

ja $\delta(x) = (y, d_1, d_2, d_3, \ldots)$.

Näitame, et esitused $F(\alpha, x, y)$ on kõik erinevad mistahes erinevate α, x ja y korral. Oletame, et $F(\alpha_1, x_1, y_1) = F(\alpha_2, x_2, y_2)$. Siis $y_1 = y_2$, sest arvud y_1 ja y_2 on esitustes F esimesel kohal. Seega

$$\begin{aligned}\beta(\alpha_1) + \gamma(x_1) &= F(\alpha_1, x_1, y_1) - \delta(y_1) = \\ &= F(\alpha_2, x_2, y_2) - \delta(y_2) = \beta(\alpha_2) + \gamma(x_2).\end{aligned}$$

Võrreldes nende jadade teisel kohal seisvaid arve, saame, et $x_1 = x_2$. Siis ka $\beta(x_1) = \beta(x_2)$ ning järelikult $\alpha_1 = \alpha_2$. Saime vastuolu jadade α_1, α_2 ning arvude x_1, x_2 ja y_1, y_2 erineva valikuga.

Kuna arvul x saab olla 2^{n-1} ja arvul y 2^n erinevat väärtust, siis oleme konstrueerinud arvu 2^{n+3} 2^{2n-1} esitust. Võrratus (13) on tõestatud.

Tõestame nüüd nõutava hinnangu kehtivuse matemaatilise induktsiooni meetodil. Oletame, et ta kehtib mingi n korral. Siis võrratusest (13) mistahes $n > 6$ korral

$$f(2^{n+3}) \geqslant 2^{2n-1} f(2^n) > 2^{2n-1} \cdot 2^{\frac{n^2}{4}} \geqslant 2^{\frac{(n+3)^2}{4}}.$$

Jääb veel veenduda, et kehtib induktsiooni baas nelja arvu $n = 3, 4, 5, 6$ korral. Kasutades asjaolu, et funktsioon $f(n)$ on ilmselt mittekahanev, saame

$$f(2^3) = 10 > 2^{\frac{3^2}{4}},$$

$$f(2^4) = 36 > 16 = 2^{\frac{4^2}{2}},$$

$$f(2^5) > f(16) + 8f(8) + 4f(4) = 132 > 128 > 2^{\frac{5^2}{4}},$$

$$f(2^6) > f(32) + 16f(16) > 132 + 576 = 708 > 512 = 2^{\frac{6^2}{4}}.$$

Seega mistahes positiivse täisarvu $n \geqslant 3$ korral $f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}}$.

Märkus 1: Lahenduses 2 saadut saab rakendada täpsemate hinnangute leidmisel. Näiteks võrratust

$$f(2^n) \geqslant 2^{\frac{(n-2)^2}{3}}$$

õnnestub lihtsasti tõestada võrratust (13) kasutades matemaatilise induktsiooni teel. Märgime induktsiooni sammu tõestuseks vajaliku:

$$f(2^{n+3}) \geqslant 2^{2n-1} f(2^n) \geqslant 2^{2n-1} 2^{\frac{(n-2)^2}{3}} = 2^{\frac{(n+1)^2}{3}}.$$

Märkus 2: Ülesande teksti võib ka teisiti sõnastada:

Olgu positiivse täisarvu n korral $f(n)$ niisuguste k elemendist koosnevate mittekasvavate, mittenegatiivsete elementidega jadade $c_1, c_2, \ldots, c_k$ arv, mille korral $n = 2^{c_1} + 2^{c_2} + \ldots + 2^{c_k}$. Tõesta, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.