# 1997.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

## Mar del Plata (Argentiina), 24.–25. juulil 1997

### Esimene päev

1. Tasandi täisarvuliste koordinaatidega punktid on ühikruutude tippudeks. Ruudud on värvitud vaheldumisi mustaks ja valgeks (nagu malelaual).

   Mistahes positiivsete täisarvude paari $m, n$ korral vaatleme täisnurkset kolmnurka, mille tipud on täisarvuliste koordinaatidega ning mille kaatetid pikkustega $m$ ja $n$ paiknevad piki ruutude servi. Olgu $S_1$ sellise kolmnurga musta osa kogupindala ja $S_2$ selle valge osa kogupindala ning olgu $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

   (a) Leia $f(m,n)$ väärtused kõigi selliste positiivsete täisarvude $m$ ja $n$ korral, mis on mõlemad paaris või mõlemad paaritud.

   (b) Tõesta, et $f(m,n) \leqslant \dfrac{1}{2}\max(m,n)$ mistahes $m$ ja $n$ korral.

   (c) Tõesta, et ei leidu niisugust konstanti $C$, et $f(m,n) < C$ mistahes $m$ ja $n$ korral.

2. Olgu nurk $\angle A$ vähim kolmnurgas $ABC$. Punktid $B$ ja $C$ jaotavad selle kolmnurga ümberringjoone kaheks kaareks. Olgu $U$ sisepunkt sellel punktide $B$ ja $C$ vahelisel kaarel, mis ei sisalda punkti $A$.

   Lõikude $AB$ ja $AC$ keskristsirged lõikavad sirget $AU$ vastavalt punktides $V$ ja $W$. Sirged $BV$ ja $CW$ lõikuvad punktis $T$. Tõesta, et $|AU| = |TB| + |TC|$.

3. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sellised reaalarvud, et $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ ja $|x_i| \leqslant \dfrac{n+1}{2}$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Tõesta, et leidub arvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ niisugune ümberjärjestus $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mille korral $|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

# 1997.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

## Mar del Plata (Argentiina), 24.–25. juulil 1997

**Teine päev**

4. Nimetame $n \times n$ maatriksit (ruudukujulist arvutabelit), mille elemendid kuuluvad hulka $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, *hõbedaseks* maatriksiks, kui iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral sisaldab selle $i$-nes rida ja $i$-nes veerg kokku kõik hulga $S$ elemendid. Tõesta, et
   (a) $n = 1997$ korral ei leidu ühtki hõbedast maatriksit;
   (b) hõbedased maatriksid leiduvad lõpmata paljude $n$ väärtuste korral.

5. Leia kõik täisarvupaarid $(a, b)$, kus $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, mis rahuldavad võrrandit $a^{b^2} = b^a$.

6. Tähistagu $f(n)$ erinevate võimaluste arvu positiivse täisarvu $n$ esitamiseks arvu 2 mittenegatiivsete täisarvuliste astendajatega astmete summana. Esitusi, mis erinevad üksteisest ainult liidetavate järjekorra poolest, me seejuures ei erista. Näiteks $f(4) = 4$, sest arvu 4 saab esitada järgmisel neljal viisil: $4$; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

   Tõesta, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.