1996.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Võime ruudustikku vaadelda punktihulgana

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 19,\ 0 \leqslant j \leqslant 11\}.$$

Meie ülesanne on liikuda punktist $(0, 0)$ punkti $(19, 0)$ läbi hulga $\mathcal{A}$ punktide nii, et iga sammu pikkus oleks $\sqrt{r}$. Niisiis, iga sammu $(x, y) \to (x + a, y + b)$ korral $a^2 + b^2 = r$.

(a) Kui r on paarisarv, siis võrrandi $a^2 + b^2 = r$ iga lahendi (a, b) puhul on summa $a+b$ samuti paarisarv, see tähendab, iga punkti (x, y) puhul, millele saab liikuda punktist $(0, 0)$, peab $x + y$ olema paarisarv. Et aga $19 + 0 = 19$ on paaritu arv, siis ei saa punktist $(0, 0)$ punkti $(19, 0)$ paarisarvu r korral liikuda.

Kui arv r on arvu 3 kordne, siis võrrandi $a^2 + b^2 = r$ iga lahendi (a, b) puhul peavad nii a kui b olema arvu 3 kordsed, sest -1 ei ole ruutjäägiks mooduli 3 järgi. Niisiis peavad iga punkti (x, y) puhul, millele saab liikuda punktist $(0, 0)$, arvud x ja y jaguma arvuga 3. Et aga arv 19 ei jagu arvuga 3, siis ei saa punktist $(0, 0)$ punkti $(19, 0)$ kolmega jaguva arvu r korral liikuda.

(b) Vaatleme juhtu $r = 73 = 8^2 + 3^2$. Tähistagu a, b, c ja d vastavalt $\pm(8, 3)$, $\pm(8, -3)$, $\pm(3, 8)$ ja $\pm(3, -8)$-tüüpi käikude arvusid. Täpsemalt, olgu a väärtuseks $(8, 3)$-tüüpi käikude arv, millest on lahutatud $(-8, -3)$-tüüpi käikude arv; samasugune täpsustus käigu ka arvude b, c ja d kohta. Et tarvis on punktist $(0, 0)$ jõuda punkti $(19, 0)$, siis

$$8(a + b) + 3(c + d) = 19, \quad 3(a - b) + 8(c - d) = 0. \tag{1}$$

Näeme, et võrrandid (1) on rahuldatud näiteks juhul $(a+b, c+d) = (2, 1)$, $(a - b, c - d) = (-8, 3)$, millest siis $a = -3$, $b = 5$, $c = 2$ ja $d = -1$.

Liigume nüüd punktist $(0, 0)$ punkti $(19, 0)$ kolme $(-8, -3)$-tüüpi sammu, viie $(8, -3)$-tüüpi sammu, kahe $(3, 8)$-tüüpi sammu ja ühe $(-3, 8)$-

tüüpi sammuga. Kitsenduseks on, et ühegi sammuga pole lubatud punktihulgast $\mathcal{A}$ välja minna. Leiame sammude jada

$$(0,0) \to (8,3) \to (11,5) \to (19,2) \to (16,10) \to (8,7) \to (0,4) \to \\ \to (8,1) \to (11,9) \to (3,6) \to (11,3) \to (19,0).$$

Märkus: Võrrandid (1) on rahuldatud ka juhul $(a+b, c+d) = (2,1)$, $(a-b, c-d) = (-8,3)$, millest $a = 5$, $b = -3$, $c = -1$ ja $d = 2$. Siit saame sammude jada

$$(0,0) \to (8,3) \to (16,6) \to (8,9) \to (5,1) \to (13,4) \to (5,7) \to \\ \to (13,10) \to (16,2) \to (8,5) \to (16,8) \to (19,0).$$

(c) Paneme tähele, et arvu $r = 97$ ainus esitus kahe täisarvu ruudu summana on $97 = 9^2 + 4^2$. Seega on sellel juhul mistahes samm avaldatav mingi vektorina kujul $(\pm 9, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 9)$. Jagame hulga $\mathcal{A}$ punktid kaheks hulgaks $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ järgmisel viisil:

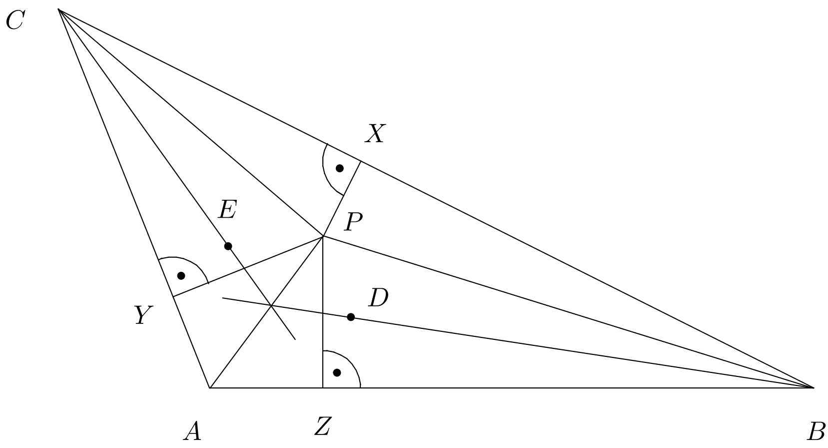
$$\mathcal{B} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leqslant i \leqslant 19, 4 \leqslant j \leqslant 7\}, \qquad \mathcal{C} = \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}.$$

On lihtne näha, et $(\pm 9, \pm 4)$-tüüpi sammud viivad alati mingist hulga $\mathcal{B}$ punktist hulga $\mathcal{C}$ punkti ja vastupidi, samas aga $(\pm 4, \pm 9)$-tüüpi sammud viivad alati mingist hulga $\mathcal{C}$ punktist hulga $\mathcal{C}$ punkti. Paneme ka tähele, et ühe sammuga pole võimalik astuda mingist hulga $\mathcal{B}$ punktist hulga $\mathcal{B}$ punkti.

Ainult iga $(\pm 9, \pm 4)$-tüüpi samm muudab x-koordinaadi paarsust, niisiis, liikumaks punktist $(0,0)$ punkti $(19,0)$, on tarvis teha paaritu arv seda tüüpi samme. Iga $(\pm 9, \pm 4)$-tüüpi samm viib mingist hulga $\mathcal{B}$ punktist hulga $\mathcal{C}$ punkti ja vastupidi; kuna alguspunkt $(0,0)$ on hulgas $\mathcal{C}$, oleme paaritu arvu seda tüüpi sammude järel hulga $\mathcal{B}$ mingis punktis. Samas, punkt $(19,0)$ kuulub hulka $\mathcal{C}$. Tekkinud vastuolust nähtub, et antud tingimustel pole võimalik liikuda punktist $(0,0)$ punkti $(19,0)$.

2. Tõestame kõigepealt ühe lemma.

Lemma: Lõigaku sirgetele BC, CA ja AB punktist P tõmmatud ristsirged neid sirgeid vastavalt punktides X, Y ja Z (vt. joonis 1). Siis
(i) $|YZ| = |PA| \sin \angle A$,
(ii) $\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$.



Joonis 1

Lemma tõestus: (i) Et $\angle PAY + \angle PAZ = \pi$, on nelinurk $AZPY$ kõõlnelinurk. Seega $|AP| = \dfrac{|AY|}{\sin \angle APY} = \dfrac{|AY|}{\sin \angle AZY}$. Siinusteoreemi kohaselt $|AP| = \dfrac{|AY|}{\sin \angle AZY} = \dfrac{|YZ|}{\sin \angle A}$, millest järeldubki lemma esimene väide.

(ii) Et nelinurk $AZPY$ on kõõlnelinurk, siis $\angle BPC + (\pi - \angle A) = 2\pi - (\angle BPZ + \angle CPY)$, millest $\angle BPC - \angle A = \pi - (\angle BPZ + \angle CPY)$.

Kuna $\angle PXB + \angle PZB = \angle PXC + \angle PYZ = \pi$, on ka nelinurgad $BXPZ$ ja $CXPY$ kõõlnelinurgad. Nüüd $\angle YXZ = \pi - (\angle BXZ + \angle CXY) = \pi - (\angle BPZ + \angle CPY)$, millest järeldub lemma teine väide.

Ülesandes antud tingimusest $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$ järeldub lemma teise väite kohaselt $\angle XZY = \angle XYZ$. Seega $|XY| = |XZ|$; et lemma esimese väite kohaselt $|XY| = |CP| \cdot \sin \angle C$ ja $|XZ| = |BP| \cdot \sin \angle B$, siis $|CP| \cdot \sin \angle C = |BP| \cdot \sin \angle B$ ehk $\dfrac{\sin \angle C}{|BP|} = \dfrac{\sin \angle B}{|CP|}$. Siinusteoreemist $\dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|CP|}$.

Lõikugu sirged BD ja CE sirgega AP vastavalt punktides Q ja R. Nurgapoolitaja omadusest $\dfrac{|AQ|}{|QP|} = \dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|CP|} = \dfrac{|AR|}{|RP|}$, mis tähendab, et punktid P ja Q ühtivad.

3. *Vastus:* $f(n) = 0$ mistahes mittenegatiivse täisarvu n korral, või $f(n) = \left(\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor + n_i\right) a$, kus $a \in \mathbb{N}$ ning $n_1, n_2, \ldots, n_{a-1} \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Lahendus: Võttes lähtevõrrandis $m = n = 0$, saame $f(0) = 0$; nüüd võttes $n = 0$, kehtib $f(f(m)) = f(m)$ mistahes $m \in \mathbb{N}_0$ korral. Seega on antud funktsionaalvõrrand samaväärne järgmisega:

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n), \qquad f(0) = 0.$$

Eeldame nüüd, et $f(x)$ ei ole samaselt võrdne nulliga ning tähistame tähega a vähima nullist erineva funktsiooni väärtuse. Siis saame $f(a) = a$.

Kehtigu nüüd mingi positiivse täisarvu k korral $f(ka) = ka$. Siis $f((k+1)a) = f(ka + a) = f(ka) + a = (k+1)a$; matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt kehtib $f(ka) = ka$ seega mistahes positiivse täisarvu k korral.

Näitame, et kõik funktsiooni f nullist erinevad väärtused esituvad kujul ka mingi positiivse täisarvu k korral. Olgu b funktsiooni f mistahes nullist erinev väärtus. Valime täisarvud q, r nii, et $b = aq + r$, $0 \leqslant r < a$, $q > 0$. Siis

$$b = f(b) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(r) + f(aq) = f(r) + aq.$$

Niisiis $f(r) = r$; et $r < a$, siis $r = 0$. Seega esituvad kõik funktsiooni f nullist erinevad väärtused kujul ka.

Nüüd $f(i) = an_i$ mistahes $i < a$ puhul, kus $n_0 = 0$ ja $n_i \in \mathbb{N}_0$.

Vaatleme mistahes positiivset täisarvu n ja esitame ta kujul $n = ka + i$, kus $0 \leqslant i < a$. Siis antud võrrandist saame

$$f(n) = f(ka + i) = f(i + f(ka)) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a.$$

Veendume, et niisugune funktsioon f rahuldab lähtevõrrandit: võtame seal $m = ka + i$, $n = la + j$, $0 \leqslant i, j < a$. Siis

$$f(m + f(n)) = f(ka + i + f(la + j)) = f(ka + i + (n_j + l)a) =$$

$$\begin{aligned}&= f((k+l+n_j)a+i) = (k+l+n_j+n_i)a = \\ &= f(m)+f(n)\,.\end{aligned}$$

Seega kui funktsioon f ei ole samaselt võrdne nulliga, saab ta esitada järgmisel kujul: olgu $a \in \mathbb{N}$ ning $n_1, n_2, \ldots, n_{a-1} \in \mathbb{N}_0$ valitud suvaliselt, siis

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + n_i \right) a.$$

Teine päev

4. *Vastus:* 481^2.

   Lahendus: Tähistame $15a + 16b = r^2$ ja $16a - 15b = s^2$, kus $r, s \in \mathbb{N}$. Saame, et

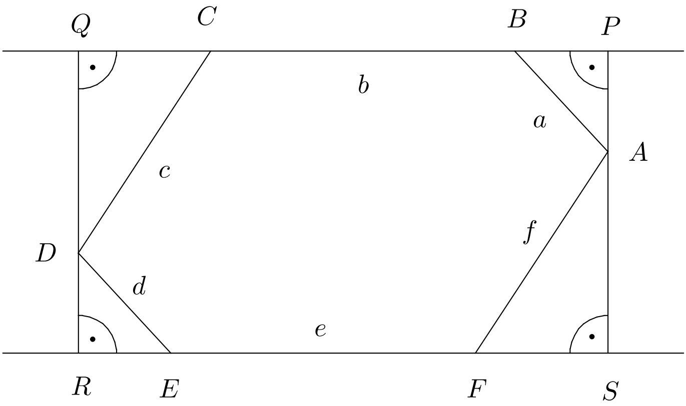
   $$r^4 + s^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

   Paneme tähele, et $481 = 13 \cdot 37$. Et $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{13}$, siis kas $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$ või $r \not\equiv 0$, $s \not\equiv 0$ mooduli 13 järgi. Viimasel juhul saame arvu 13 algarvulisuse tõttu $r \equiv ks \pmod{13}$, $k \in \mathbb{N}$. Siis $r^4 \equiv k^4 s^4 \equiv (-1)s^4 \pmod{13}$, millest $k^4 \equiv -1 \pmod{13}$. Märkame, et -1 ei saa olla neljanda astme jääk mooduli 13. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et mingi $x \in \mathbb{N}$ korral $x^4 \equiv -1 \pmod{13}$, siis Fermat' väikesest teoreemist $1 \equiv x^{12} \equiv (x^4)^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{13}$, vastuolu.

   Niisiis $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$; analoogiliselt $r \equiv s \equiv 0 \pmod{37}$ (sest -1 pole neljanda astme jääk ka mooduli 37 järgi). Seega on arvud r ja s arvu 481 kordsed, mis tähendab, et $r \geqslant 481$, $s \geqslant 481$.

   Nüüd võttes näiteks $a = 481 \cdot 31$ ja $b = 481$, saame $r = s = 481$.

5. Tähistame kuusnurga $ABCDEF$ küljed AB, BC, CD, DE, EF ning FA vastavalt tähtedega a, b, c, d, e ja f (vt. joonis 2). Vastaskülgede paralleelsusest saame, et selle kuusnurga vastasnurgad on võrdsed, s.t. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ning $\angle C = \angle F$.



Joonis 2

Tõmbame kõrgused $AP \perp BC$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$ ning $AS \perp EF$. Siis on nelinurk $PQRS$ ristkülik ning $|BF| \geqslant |PS| = |QR|$. Seega $2|BF| \geqslant |PS| + |QR|$ ehk

$$2|BF| \geqslant (a \sin\angle B + f \sin\angle C) + (c \sin\angle C + d \sin\angle B).$$

Analoogiliselt,

$$\begin{aligned} 2|DB| &\geqslant (c \sin\angle A + b \sin\angle B) + (e \sin\angle B + f \sin\angle A), \\ 2|FD| &\geqslant (e \sin\angle C + d \sin\angle A) + (a \sin\angle A + b \sin\angle C). \end{aligned}$$

Kolmnurkade FAB, BCD ja DEF ümberringjoonte raadiused on aga lõikude BF, DB ja FD pikkustega seotud järgmiselt:

$$R_A = \frac{|BF|}{2\sin\angle A}, \qquad R_C = \frac{|DB|}{2\sin\angle C}, \qquad R_E = \frac{|FD|}{2\sin\angle B}.$$

Pärast teisendamist saame, et

$$\begin{aligned} 4(R_A + R_C + R_E) \geqslant a &\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} + \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}\right) + \\ &+ b\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C} + \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\right) + c\left(\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A} + \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\right) + \end{aligned}$$

$$+\,d\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A}+\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}\right)+e\left(\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}+\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\right)+$$
$$+\,f\left(\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}+\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a+b+c+d+e+f)=2P,$$

mille läbijagamisel arvuga 4 saame nõutava võrratuse.

Näeme, et võrdus kehtib parajasti siis, kui $\sin\angle A=\sin\angle B=\sin\angle C$, mis antud juhul tähendab, et $\angle A=\angle B=\angle C$, s.t. kui kuusnurk on korrapärane.

6. Paneme kõigepealt tähele, et üldisust kitsendamata võime eeldada, et arvud p ja q on ühistegurita. Tõepoolest, leidugu arvudel p ja q ühine tegur $d>1$, siis võtame $p'=\frac{p}{d}$, $q'=\frac{q}{d}$ ning $x_i'=\frac{x_i}{d}$, $0\leqslant i\leqslant n$ korral — pidades silmas võrdust $x_0=x_n=0$ ja antud tingimusi, jaguvad arvud x_i, $0\leqslant i\leqslant n$ arvuga d. Nüüd on arvud p' ja q' ühistegurita ning arvudel x_i', $0\leqslant i\leqslant n$, on ülesande tekstis nimetatud omadus.

   Olgu nüüd k indeksit $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ nii, et $x_i-x_{i-1}=p$, siis nende indeksite $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ arv, mille korral $x_i-x_{i-1}=-q$ on $n-k$. Et $x_n=x_0=0$, siis liites iga indeksi $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ korral saadavad võrdused, näeme, et $kp=(n-k)q$, ning kuna arvud p ja q on ühistegurita, siis $k=aq$ ja $n-k=ap$ mingi positiivse täisarvu a korral. Seega $p+q<n=a(p+q)$, millest $a>1$.

   Tähistame $y_i=x_{i+p+q}-x_i$, kus $i\in\{0,1,\ldots,n-p-q\}$. Et $n>p+q$, siis on arve y_i rohkem kui üks. Näitame, et vähemalt üks arvudest y_i on võrdne nulliga; sellest järeldub ülesande väide.

   Iga i korral tähistame tähega S_i indeksite hulka $\{i+1,i+2,\ldots,i+p+q\}$. Olgu r niisuguste indeksite $j\in S_i$ arv, mille korral $x_j-x_{j-1}=p$; siis niisuguste indeksite $j\in S_i$ arv, mille puhul $x_j-x_{j-1}=-q$, on $p+q-r$. Summeerides võrdused üle kõigi indeksite $j\in S_i$ saame, et

$$y_i=rp-(p+q-r)q=(p+q)(r-q).$$

   Niisiis on iga indeksi i korral arv y_i arvu $(p+q)$ kordne. Vaatleme vahet

$$\begin{aligned}y_{i+1}-y_i&=(x_{i+p+q+1}-x_{i+1})-(x_{i+p+q}-x_i)=\\&=(x_{i+p+q+1}-x_{i+p+q})-(x_{i+1}-x_i).\end{aligned}$$

Et ahelvõrduse paremal poolel on kummagi sulgavaldise väärtus võrdne kas arvuga p või arvuga $-q$, siis on nimetatud vahe võrdne kas arvuga 0 või arvuga $\pm(p+q)$.

Paneme tähele, et $y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \ldots + y_{n-p-q} = 0$. Niisiis ei saa korraga olla kõik arvud y_i positiivsed või negatiivsed. Seega on jadas $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-p-q-1}, y_{n-p-q}$ kaks kõrvutist arvu y_i, y_{i+1}, mis on erimärgilised. Et aga iga arv y_i on arvu $p+q$ kordne ning kõrvutiste arvude y_i vahe on alati 0 või $\pm(p+q)$, siis leidub indeks i nii, et $y_i = 0$.