1996.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bombay (India), 10.–11. juulil 1996

Esimene päev

1. Olgu r etteantud positiivne täisarv ning $ABCD$ ristkülik mõõtmetega $|AB| = 20$, $|BC| = 12$, mis on jaotatud 20×12 ühikruuduks. Selles ruudustikus on lubatud astuda ühelt ruudult teisele siis ja ainult siis, kui nende keskpunktide vahekaugus on $\sqrt{r}$. Meie ülesandeks on liikuda niisuguste sammude abil ristküliku tipu A juures asuvalt ruudult tipu B juures asuvale ruudule.
   (a) Tõesta, et selline liikumine ei ole võimalik, kui r jagub arvuga 2 või 3.
   (b) Tõesta, et selline liikumine on võimalik, kui $r = 73$.
   (c) Kas selline liikumine on võimalik, kui $r = 97$?

2. Olgu P kolmnurga ABC sisepunkt, kusjuures

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

   Olgu D ja E vastavalt kolmnurkade APB ja APC siseringjoonte keskpunktid. Tõesta, et sirged AP, BD ja CE lõikuvad ühes punktis.

3. Olgu S kõikide mittenegatiivsete täisarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : S \to S$, mis rahuldavad tingimust

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

   mistahes arvude m, n korral hulgast S.

1996.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Bombay (India), 10.–11. juulil 1996

Teine päev

4. Positiivsed täisarvud a ja b valitakse nii, et arvud $15a+16b$ ja $16a-15b$ on mingite positiivsete täisarvude ruudud. Milline on neist kahest täisruudust väiksema vähim võimalik väärtus?

5. Olgu $ABCDEF$ kumer kuusnurk, mille vastasküljed AB ja DE, BC ja EF ning CD ja FA on paralleelsed. Olgu R_A, R_C ja R_E vastavalt kolmnurkade FAB, BCD ja DEF ümberringjoonte raadiused ning P vaadeldava kuusnurga ümbermõõt. Tõesta, et

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}.$$

6. Olgu p, q, n positiivsed täisarvud, $p + q < n$ ning rahuldagu täisarvud $x_0, x_1, \ldots, x_n$ järgmisi tingimusi:

   (i) $x_0 = x_n = 0$;

   (ii) iga indeksi i korral $(1 \leqslant i \leqslant n)$ kehtib võrdus $x_i - x_{i-1} = p$ või võrdus $x_i - x_{i-1} = -q$.

   Tõesta, et leiduvad indeksid i, j, kus $i < j$ ja $(i, j) \neq (0, n)$, nii, et $x_i = x_j$.