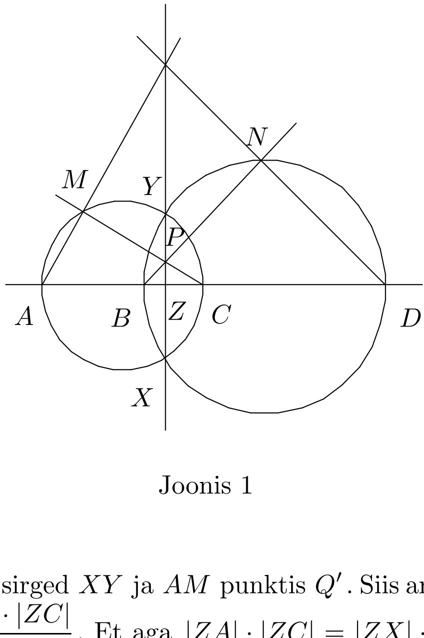
1995.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

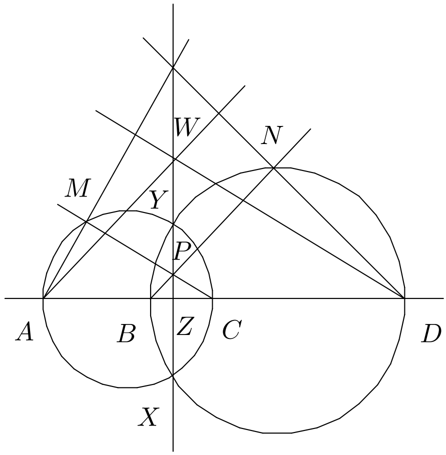
1. *Lahendus 1.* Lõikugu sirged XY ja DN punktis Q (vt. joonist 1). Et $XY \perp BD$ ning $\angle BND = \frac{\pi}{2}$, siis $\angle BPZ = \angle CDQ$, millest järeldub, et kolmnurgad BPZ ja QDZ on sarnased. Niisiis $\frac{|ZQ|}{|ZD|} = \frac{|ZB|}{|ZP|}$ ehk $|ZQ| = \frac{|ZD| \cdot |ZB|}{|ZP|}$.



Joonis 1

Lõikugu nüüd sirged XY ja AM punktis Q'. Siis analoogiliselt eelnevaga $|ZQ'| = \frac{|ZA| \cdot |ZC|}{|ZP|}$. Et aga $|ZA| \cdot |ZC| = |ZX| \cdot |ZY| = |ZB| \cdot |ZD|$, siis $|ZQ| = |ZQ'|$, millest $Q = Q'$. Seega lõikuvad sirged AM, DN ja XY ühes punktis.

Lahendus 2. Tõmbame sirgega BP paralleelse sirge läbi punkti A, lõigaku see sirget XY punktis W (vt. joonist 2). Siis on kolmnurgad BPZ ning AWZ sarnased, mis tähendab, et $\dfrac{|ZP|}{|ZW|} = \dfrac{|ZB|}{|ZA|}$.



Joonis 2

Et $|ZA| \cdot |ZC| = |ZX| \cdot |ZY| = |ZB| \cdot |ZD|$, siis $\dfrac{|ZP|}{|ZW|} = \dfrac{|ZC|}{|ZD|}$. Nüüd on ka kolmnurgad CPZ ja DWZ sarnased, seega on sirged DW ja CP paralleelsed. Kuna $AM \perp CP$, siis ka $AM \perp DW$. Analoogiliselt: et $DN \perp BP$, siis ka $DN \perp AW$. Kuna ka $XY \perp AD$, siis on paiknevad kolmnurga AWD kõrgused sirgetel AM, DN ja XY, millest järeldubki ülesande väide.

2. *Lahendus 1.* Tähistame tõestatava võrratuse vasaku poole tähega S ning tähistame $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{1}{c}$ ja $T = x + y + z$. Siis on ka x, y ja z positiivsed reaalarvud ning $xyz = 1$. Nüüd

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{T-x} = \frac{T^2 - (T^2 - x^2)}{T-x} =$$

$$= \frac{T^2}{T-x} - T - x\,.$$

Analoogiliselt $\dfrac{1}{b^3(a+c)} = \dfrac{T^2}{T-y} - T - y$ ning $\dfrac{1}{c^3(a+b)} = \dfrac{T^2}{T-z} - T - z$.

Aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelisest võrratusest saame, et

$$S = T^2\Big(\frac{1}{T-x} + \frac{1}{T-y} - \frac{1}{T-z}\Big) - 4T \geqslant T^2 \cdot \frac{9}{3T-T} - 4T =$$
$$= \frac{9}{2} \cdot T - 4T = \frac{x+y+z}{2}\,.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\frac{x+y+z}{2} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}\,.$$

Saadud võrratuses kehtib võrdus vaid juhul, kui $x = y = z = 1$, see tähendab, kui $a = b = c = 1$.

Lahendus 2. Tähistame S ning x, y ja z samuti nagu eelmises lahenduses. Siis

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\,.$$

Cauchy-Bunjakovski võrratusest saame, et

$$((y+z) + (x+z) + (x+y)) \cdot S \geqslant (x+y+z)^2\,,$$

mis tähendab, et $S \geqslant \dfrac{x+y+z}{2}$. Nüüd jätkame analoogiliselt eelmise lahendusega.

3. *Vastus:* $n = 4$.

Lahendus 1. Tõestame, et $n = 4$ on ainus täisarv, mis rahuldab ülesande tingimusi. Juhul $n = 4$ valime näiteks tasandil punktid A_1, A_2, A_3 ja A_4 nii, et nelinurk $A_1A_2A_3A_4$ on ühikruut ning võtame $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \dfrac{1}{6}$.

Jääb veel näidata, et juhul $n = 5$ ei eksisteeri n ülesande tingimustele vastavat punkti; sellest järeldub siis, et ükski täisarv $n \geqslant 5$ ei saa olla ülesande lahendiks.

Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad ülesande tingimustele vastavad 5 punkti A_1, A_2, A_3, A_4 ja A_5 ning 5 reaalarvu r_1, r_2, r_3, r_4 ja r_5. Tähistame kolmnurga $A_iA_jA_k$ pindala $[ijk] = r_i + r_j + r_k$, kus $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$. Kui nelinurk $A_iA_jA_kA_l$ on kumer, siis $[ijk] + [kli] = [jkl] + [lij]$, millest $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Näitame, et ei saa kehtida $r_i = r_j$ mistahes $1 \leqslant i < j \leqslant 5$ korral. Tõepoolest, oletame üldisust kitsendamata, et $r_4 = r_5$; siis $[124] = [125]$. Kui punktid A_1 ja A_2 paiknevad sirgest A_4A_5 samal pool, siis on sirge A_1A_2 sirgega A_4A_5 paralleelne; kui aga punktid A_1 ja A_2 paiknevad sirgest A_4A_5 erineval pool, siis läbib sirge A_1A_2 lõigu A_4A_5 keskpunkti M. Sama kehtib ka sirgete A_2A_3 ja A_3A_1 kohta. Et aga punktid A_1, A_2 ja A_3 ei asu ühel sirgel, siis saab sirgetest A_1A_2, A_2A_3 ja A_3A_1 ülimalt üks olla paralleelne sirgega A_4A_5 ning ülimalt üks läbida punkti M, vastuolu.

Vaatleme nüüd punktihulga $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kumerat katet. Võimalikud on järgmised kolm juhtu.

a) Olgu see kumer kate viisnurk $A_1A_2A_3A_4A_5$. Et nelinurgad $A_1A_2A_3A_4$ ja $A_1A_2A_3A_5$ on kumerad, siis eelpoolnäidatu kohaselt $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ ning $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$, millest $r_4 = r_5$, vastuolu.

b) Olgu see kumer kate nelinurk. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et see on nelinurk $A_1A_2A_3A_4$ ning punkt A_5 paikneb kolmnurga $A_3A_4A_1$ sisepiirkonnas. Siis on aga nelinurk $A_1A_2A_3A_5$ kumer ja analoogiliselt eelmises lõigus märgituga viib see vastuoluni.

c) Olgu see kumer kate kolmnurk — üldisust kitsendamata võime eeldada, et see on kolmnurk $A_1A_2A_3$. Siis

$$[124] + [234] + [314] = [125] + [235] + [315] ,$$

millest jällegi $r_4 = r_5$, vastuolu.

Lahendus 2. Analoogiliselt eelmise lahendusega näitame, et

$$r_i + r_k = r_j + r_l ,$$

kui nelinurk $A_iA_jA_kA_l$ on kumer. Võime nüüd üldisust kitsendamata eeldada, et $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \geqslant r_4 \geqslant r_5$. Siis on kolmnurk $A_1A_2A_3$ suurima pindalaga kõigi viie punkti poolt moodustatud kümne kolmnurga hulgast. Seega asuvad punktid A_4 ja A_5 kolmnurga $B_1B_2B_3$ sisepiirkonnas, kus punktid A_1, A_2 ja A_3 on vastavalt külgede B_2B_3, B_3B_1 ja B_1B_2 keskpunktid.

Oletame, et punktid A_4 ja A_5 paiknevad kolmnurga $A_1A_2A_3$ sisepiirkonnas. Siis $[124] + [234] + [314] = [125] + [235] + [315]$, millest $r_4 = r_5$. Analoogiliselt eelmises lahenduses märgituga: kuna punktid A_4 ja A_5 asetsevad nii sirgest A_1A_2 kui ka sirgest A_2A_3 samal pool, peab sirge A_4A_5 olema paralleelne mõlemaga neist. See on aga võimatu, sest punktid A_1, A_2 ja A_3 ei paikne ühel sirgel.

Oletame nüüd üldisust kitsendamata, et punkt A_4 asetseb kolmnurga $B_1A_2A_3$ sisepiirkonnas. Siis on nelinurk $A_1A_2A_4A_3$ kumer, millest $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$. Kui punkt A_5 on samuti kolmnurga $B_1A_2A_3$ sisepiirkonnas, siis ka $r_1 + r_5 = r_2 + r_3$, millest $r_4 = r_5$, eelmises lõigus märgituga analoogiline vastuolu. Kui aga punkt A_5 asetseb nelinurga $A_2A_3B_2B_3$ sisepiirkonnas, siis on nelinurk $A_4A_2A_5A_3$ kumer, millest $r_4 + r_5 = r_2 + r_3$, seega $r_1 = r_5$. Analoogiliselt eelmise lahendusega viib ka see vastuoluni.

Teine päev

4. *Vastus:* 2^{997}.

   Ülesandes antud tingimusest saame teisendamisel

   $$(2x_i - x_{i-1})\Big(\frac{1}{x_{i-1}x_i} - 1\Big) = 0\ ,$$

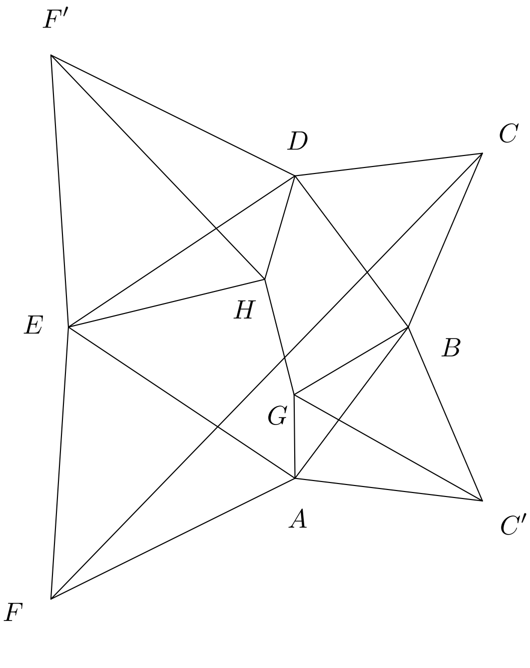
   millest kas $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$ või $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$.

   Näitame matemaatilise induktsiooni abil, et $i \geqslant 0$ korral $x_i = 2^{k_i}x_0^{\epsilon_i}$, mingi täisarvu k_i, $|k_i| \leqslant i$ ja $\epsilon_i = (-1)^{k_i+i}$ puhul. Tõepoolest, kui $i = 0$, siis võime võtta $k_0 = 0$ ning $\epsilon_0 = 1$. Kehtigu nüüd tõestatav võrdus $i - 1$ korral; kui $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$, võtame $k_i = k_{i-1} - 1$ ja

$\epsilon_i = \epsilon_{i-1} = (-1)^{(k_{i-1}-1)+i} = (-1)^{k_i+i}$. Kui aga $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$, siis võtame $k_i = -k_{i-1}$ ja $\epsilon_i = -\epsilon_{i-1} = (-1)^{-k_{i-1}+(i-1)+1} = (-1)^{k_i+i}$. Kummalgi juhul kehtib, et $|k_i| \leqslant i$ ning $\epsilon_i = (-1)^{k_i+i}$.

Niisiis $x_{1995} = 2^k x_0^\epsilon$, kus $k = k_{1995}$ ja $\epsilon = \epsilon_{1995}$, $0 \leqslant |k| \leqslant 1995$ ning $\epsilon = (-1)^{k+1995}$. Siit järeldub, et $x_0 = x_{1995} = 2^k x_0^\epsilon$. Kui k on paaritu, siis $\epsilon = 1$ ning saame, et $2^k = 1$, mis on võimatu, sest paaritu täisarv $k \neq 0$. Niisiis peab k olema paarisarv, seega $\epsilon = -1$ ja $x_0^2 = 2^k$. Kuna k on paarisarv ja $|k| \leqslant 1995$, siis $k \leqslant 1994$. Siit $x_0 \leqslant 2^{997}$.

Juht $x_0 = 2^{997}$ on võimalik, kui võtame $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, 1994$ korral ning $x_{1995} = \dfrac{1}{x_{1994}}$. Siis tõepoolest $x_{1995} = \dfrac{1}{2^{-1994} x_0} = 2^{997} = x_0$.



Joonis 3

5. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et kolmnurgad BCD ja EFA on võrd-

külgsed, seega on sirge BE nelinurga $ABDE$ sümmeetriateljeks (vt. joonis 3). Peegeldame kolmnurgad BCD ja EFA sirge BE suhtes vastavalt kolmnurkadeks $BC'A$ ja $EF'D$. Et $\angle BGA = \pi - \angle AC'B$, siis paikneb punkt G kolmnurga ABC' ümberringjoonel, millest

$$\angle AGC' = \angle ABC' = \frac{\pi}{3} .$$

Olgu K selline punkt sirgel GC', et kolmnurk KAG on võrdkülgne. Siis $\angle C'AK = \frac{\pi}{3} - \angle BAK = \angle BAG$. Kuna samuti $|C'A| = |BA|$ ja $|AK| = |AG|$, on kolmnurgad AKC' ja AGB kongruentsed. Siit

$$|GC'| = |GK| + |KC'| = |AG| + |GB| .$$

Analoogiliselt saame, et $|HF'| = |DH| + |DE|$. Nüüd

$$\begin{aligned} |CF| &= |C'F'| \leqslant |C'G| + |GH| + |HF'| = \\ &= |AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| , \end{aligned}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui punktid C', G, H ja F paiknevad ühel ja samal sirgel selles järjekorras.

Lahendus 2. Konstrueerime punktid C' ja F' samuti nagu eelmises lahenduses ning kasutame Ptolemaiose võrratust. Saame, et

$$|GC'| \cdot |AB| \leqslant |GA| \cdot |BC'| + |GB| \cdot |AC'| ,$$

millest $|AB| = |BC'| = |AC'|$ tõttu $|GC'| \leqslant |GA| + |GB|$. Analoogiliselt $|HF'| \leqslant |HD| + |DE|$. Siit järeldub, et

$$\begin{aligned} |CF| &= |C'F'| \leqslant |C'G| + |GH| + |HF'| \leqslant \\ &\leqslant |AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| . \end{aligned}$$

Märkus. Lahenduses 2 ei kasutata me tingimust $\angle AGB = \angle DHE = \frac{2\pi}{3}$. Seega kehtib tegelikult ülesandes nõutuga võrreldes tugevam väide.

6. *Vastus:* $\dfrac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$.

Lahendus 1: Tähistagu hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ mistahes p-elemendilise alamhulga A korral $s(A)$ selle alamhulga elementide summat. Hulgal

$\{1, 2, \ldots, 2p\}$ on p-elemendilisi alamhulki kokku $\binom{2p}{p}$ ning alamhulkade

$$B = \{1, 2, \ldots, p\}$$

ja

$$C = \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$$

korral kehtib ilmselt $s(B) \equiv 0 \pmod p$ ning $s(C) \equiv 0 \pmod p$.

Kui $A \neq B$ ja $A \neq C$, siis ühisosad $A \cap B$ ja $A \cap C$ ei ole tühjad. Jaotame siis $\binom{2p}{p} - 2$ hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ p-elemendilist alamhulka A p hulgast koosnevatesse klassidesse järgmiselt.

Kaks hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ erinevat p-elemendilist alamhulka A ja A' kuuluvad samasse klassi parajasti siis, kui $A \cap C = A' \cap C$ ja hulk $A' \cap B$ on hulgast $A \cap B$ saadud hulga $A \cap B$ elementide mingi täisarvuga m, $0 < m < p$, tsüklilise liitmise teel hulgas B. Teisi sõnu, olgu hulgas $A \cap B$ n elementi, $0 < n < p$. Sellisel juhul kehtib

$$\begin{aligned} A' \cap B = \{\, & x{+}m \mid x \in A \cap B,\, x{+}m \leqslant p \,\} \cup \\ & \cup \{\, x{+}m{-}p \mid x \in A \cap B,\, x \leqslant p < x{+}m \,\}\,. \end{aligned}$$

Nüüd $s(A) - s(A') \equiv mn \pmod p$, aga täisarv mn ei jagu paaritu algarvuga p. Seega annavad mingi klassi hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_p$ puhul $s(A_i)$ ja $s(A_j)$ mistahes $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $i \neq j$ korral mooduli p järgi erinevad jäägid.

Niisiis on igas klassis täpselt üks hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ niisugune alamhulk A, mille korral $s(A) \equiv 0 \pmod p$. Et aga klasse on kokku $\dfrac{\binom{2p}{p} - 2}{p}$, siis on ülesande tingimusele vastavaid hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ alamhulki $\dfrac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$.

Lahendus 2. Olgu ω p-nda astme algjuur (selline p-astme juur kompleksarvust 1, et kõik p-astme juured kompleksarvust 1, ehk ühejuured, avalduvad tema astmetena). Siis avalduvad kõik p p-nda astme ühejuurt kujul $\varepsilon_1 = \omega$, $\varepsilon_2 = \omega^2$, ..., $\varepsilon_p = \omega^p = 1$ ning

$$\prod_{i=1}^{2p} (x - \omega^i) = \Big(\prod_{i=1}^{p} (x - \omega^i)\Big)^2 = \Big(\prod_{i=1}^{p} (x - \varepsilon_i)\Big)^2 = \\ = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1 \ .$$

Kuna

$$\prod_{i=1}^{2p}(x - \omega^i) = x^{2p} + \ldots - x^p \cdot \sum \omega^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p} + \ldots + 1 \ ,$$

kus võrduse paremal poolel summamärgi all toimub summeerimine üle hulga $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ kõigi p-elemendiliste alamhulkade $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, siis saame liikme x^p kordajate võrdlemisel, et

$$2 = \sum \omega^{i_1 + i_2 + \ldots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \omega^j \ ,$$

kus võrduse paremal poolel on n_j niisuguste alamhulkade arv, mille korral $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \equiv j \pmod p$.

Niisiis

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j \omega^j - 2 = 0$$

ning ω on $(p-1)$. astme polünoomi

$$G(x) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j x^j - 2 = (n_0 - 2) + \sum_{j=1}^{p-1} n_j x^j$$

juur. Et $(p-1)$. astme polünoomi $F(x) = \sum_{j=0}^{p-1} x^j$ juured on parajasti kõik p-astme algjuured (sest p on paaritu algarv), siis on polünoom $G(x)$ polünoomi $F(x)$ kordne, millest järeldub, et $n_0 - 2 = n_1 = \ldots = n_{p-1}$.

Kuna aga $\sum_{j=0}^{p-1} n_j = \binom{2p}{p}$, siis

$$p \cdot (n_0 - 2) = n_0 - 2 + n_1 + \ldots + n_{p-1} = \binom{2p}{p} - 2 \ ,$$

millest

$$n_0 = \frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2 \ .$$