1995.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Toronto (Kanada), 19.–20. juulil 1995

Esimene päev

1. Olgu A, B, C, D neli erinevat punkti, mis paiknevad ühel sirgel selles järjekorras. Ringjooned diameetritega AC ja BD lõikuvad punktides X ja Y ning sirge XY lõikab sirget BC punktis Z. Olgu P punkt sirgel XY, mis erineb punktist Z, kusjuures sirge CP lõikab ringjoont diameetriga AC punktides C ja M ning sirge BP lõikab ringjoont diameetriga BD punktides B ja N. Tõesta, et sirged AM, DN ja XY lõikuvad ühes punktis.

2. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud ning $abc = 1$. Tõesta, et
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Leia kõik niisugused täisarvud $n > 3$, mille korral saab valida tasandil n punkti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja reaalarvud $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nii, et ükski kolmik punktidest $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ei asu ühel sirgel ning iga $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ korral on kolmnurga $A_iA_jA_k$ pindala võrdne arvuga $r_i + r_j + r_k$.

1995.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Toronto (Kanada), 19.–20. juulil 1995

Teine päev

4. Olgu $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ positiivsed reaalarvud, kusjuures $x_0 = x_{1995}$ ja iga $i = 1, 2, \ldots, 1995$ korral kehtib võrdus

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}.$$

Leia arvu x_0 maksimaalne võimalik väärtus.

5. Olgu $ABCDEF$ kumer kuusnurk, kus $|AB| = |BC| = |CD|$ ja $|DE| = |EF| = |FA|$ ning $\angle BCD = \angle EFA = \dfrac{\pi}{3}$. Olgu G ja H selle kuusnurga niisugused sisepunktid, et $\angle AGB = \angle DHE = \dfrac{2\pi}{3}$. Tõesta, et $|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geqslant |CF|$.

6. Olgu p paaritu algarv. Kui palju leidub hulgas $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ niisuguseid p-elemendilisi alamhulki A, mille elementide summa jagub arvuga p?