1994.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Olgu b_1, b_2, $\ldots$, b_m antud arvud a_1, a_2, $\ldots, a_m$ ümberjärjestatult kasvavas järjekorras: $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$. On selge, et arvud b_1, b_2, $\ldots$, b_m rahuldavad samuti ülesande eeldusi.

   Näitame, et mistahes positiivse täisarvu $p \leqslant \dfrac{m+1}{2}$ korral kehtib võrratus

   $$b_p + b_{m-p+1} \geqslant n+1\ .$$

   Oletame vastuväiteliselt, et mingi sellise p korral $b_p + b_{m-p+1} \leqslant n$. Et $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m$, siis $b_1 + b_{m-p+1} = b_{i_1}$, $b_2 + b_{m-p+1} = b_{i_2}$, $\ldots$, $b_p + b_{m-p+1} = b_{i_p}$ mingite indeksite $m-p+1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m$ korral. See on aga võimatu, sest lõigul $[m-p+2, m]$ on ainult $p-1$ erinevat positiivset täisarvu.

   Olgu nüüd $\dfrac{m+1}{2} < p \leqslant m$, siis $1 \leqslant m-p+1 < m - \dfrac{m+1}{2} + 1 = \dfrac{m+1}{2}$ ning vastavalt eespool tõestatule kehtib ka sel juhul võrratus

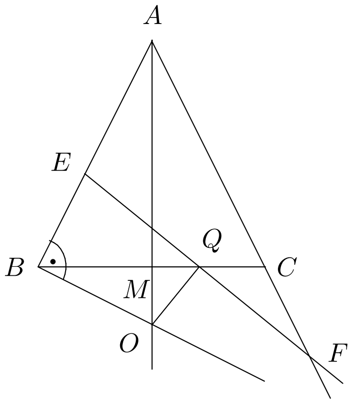
   $$b_p + b_{m-p+1} = b_{m-p+1} + b_{m-(m-p+1)+1} \geqslant n+1\ .$$

   Summeerides võrratused $b_1 + b_m \geqslant n+1$, $b_2 + b_{m-1} \geqslant n+1$, $\ldots$, $b_m + a_1 \geqslant n+1$, saame

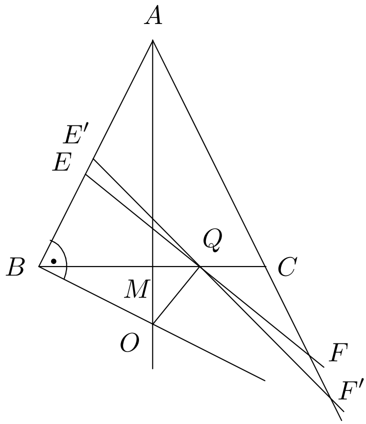
   $$2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = 2 \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) \geqslant m \cdot (n+1)\ ,$$

   mis arvuga $2m$ läbijagamisel annab tõestatava võrratuse.

2. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk alusega BC ning O, Q, E ja F punktid, mis rahuldavad ülesande tingimusi (vt. joonist 1). Tõestame kõigepealt, et kui $OQ \perp EF$, siis $|QE| = |QF|$.



Joonis 1



Joonis 2

Eeldusest $OQ \perp EF$ saame, et $\angle ABO = \angle EQO = \dfrac{\pi}{2}$ ning $BOQE$ on kõõlnelinurk. Samale kaarele toetuvate piirdenurkade võrdsusest $\angle OBQ = \angle OEQ$. Kuna $\angle OQF = \angle OCF = \dfrac{\pi}{2}$, siis on ka $OQCF$ kõõlnelinurk ning $\angle OFQ = \angle OCQ$. Et kolmnurga ABC võrdhaarsuse tõttu $\angle OBQ = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCQ$, siis $\angle OEQ = \angle OFQ$, s.t. kolmnurk OEF on võrdhaarne alusega EF. Kuna võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud kõrgus on ühtlasi mediaaniks, siis $|QE| = |QF|$.

Tõestame nüüd, et kui $|QE| = |QF|$, siis $OQ \perp EF$. Oletame vastuväiteliselt, et sirge OQ ei ole risti sirgega EF. Siis sirget EF ümber punkti Q pöörates saame sirge $E'F'$, kus punktid E' ja F' paiknevad vastavalt sirgetel AB ja AC ning $E'F' \perp OQ$ (vt. joonist 2). Eelmises lõigus tõestatu põhjal $|QE'| = |QF'|$. Et $\angle EQE' = \angle FQF'$ ja $|QE| = |QF|$, siis on kolmnurgad QEE' ja QFF' kongruentsed ning $\angle E'EQ = \angle F'FQ$, millest järeldub sirgete AB ja AC paralleelsus. Saadud vastuolu näitab, et peab kehtima $OQ \perp EF$.

3. *Vastus:* b) arvud kujul $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$, kus $n = 2, 3, \ldots$.

Tekkiva seaduspära uurimiseks koostame esimeste f väärtuste kohta tabeli.

n	$f(n)$	hulga $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ elemendid, mille kahendesituses on täpselt kolm numbrit 1
1	0	
2	0	
3	0	
4	1	111
5	1	111
6	2	111, 1011
7	3	1011, 1101, 1110
8	3	1011, 1101, 1110
9	3	1011, 1101, 1110
10	4	1011, 1101, 1110, 10011
11	5	1101, 1110, 10011, 10101, 10110
12	5	1101, 1110, 10011, 10101, 10110
13	6	1110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010

a) Koostatud tabeli põhjal püstitame hüpoteesi, et mistahes $k \geqslant 1$ korral kas $f(k+1) = f(k)$ või $f(k+1) = f(k)+1$. Selle tõestuseks paneme tähele, et arvule $k+1$ vastav hulk $A_{k+1} = \{k+2, k+3, \ldots, 2k, 2k+1, 2k+2\}$ saadakse arvule k vastavast hulgast $A_k = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ elementide $2k+1$ ja $2k+2$ lisamisel ning elemendi $k+1$ eemaldamisel. Arvu $2k+2 = 2 \cdot (k+1)$ kahendesituse saame aga arvu $k+1$ kahendesitusest, lisades sellele lõppu numbri 0. Nii on arvude $2k+2$ ja $k+1$ kahendesituses alati sama arv numbreid 1 ning näeme, et kui arvu $2k+1$ kahendesituses on kolm numbrit 1, siis $f(k+1) = f(k)+1$, vastasel korral aga $f(k+1) = f(k)$. Et näiteks arvudel $2^r + 2^s + 1$, kus $r > s$ on suvalised positiivsed täisarvud, on kahendesituses kolm numbrit 1, siis $f(k)$ kasvab tõkestamatult, ja kuna $|f(k+1) - f(k)| \leqslant 1$, ei jää seejuures ühtki täisarvu vahele. Teisisõnu, suvalise positiivse täisarvu m korral saame leida positiivse täisarvu k nii, et $f(k) = m$.

b) Eelmises lõigus tõestatust järeldub ka, et selline arv k, mille korral $f(k) = m$, on üksainus siis ja ainult siis, kui nii arvu $2k-1$ kui ka arvu $2k+1$ kahendesituses on kolm numbrit 1, ehk teisisõnu, kui nii arvu $k-1$ kui ka arvu k kahendesituses on kaks numbrit 1. Näitame, et see on nii parajasti siis, kui arv k on kujul $2^n + 2$. Tõepoolest, arvude $k-1$ ja k kahendesitustes peab olema sama palju numbreid (sest vastasel korral oleks arv k kujul $10\ldots0$). Kuna vasakult esimesel positsioonil seisab number 1, siis peab mõlema arvu kahendesituses kusagil veel täpselt üks number 1 esinema, s.t. $k = 2^n + 2^p$ ja $k-1 = 2^n + 2^r$. Siit $2^r = 2^p - 1$, mis on võimalik ainult $r = 0$ ja $p = 1$ korral.

Leiame nüüd hulga $A_{2^n+2} = \{2^n + 3,\, 2^n + 4,\, \ldots,\, 2^{n+1} + 4\}$ niisuguste elementide arvu, mille kahendesituses on kolm numbrit 1. Sellise omadusega on kõik elemendid kujul $2^n + 2^s + 2^r$, $0 \leqslant r < s < n$ ning element $2^{n+1} + 3$. Et arve kujul $2^n + 2^s + 2^r$ on $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (valides mistahes kaks erinevat elementi hulgast $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, võtame neist väiksema arvuks r ning suurema arvuks s), siis on otsitavad arvud m, mille korral leidub vaid üks k nii, et $f(k) = m$, parajasti

$$m = f(2^n + 2) = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Teine päev

4. *Vastus:* $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,5)$, $(3,1)$, $(3,5)$, $(5,2)$, $(5,3)$.

Kui $n = 1$, siis peab $\frac{2}{m-1}$ olema täisarv, millest $m = 2$ või $m = 3$. Kui $n = 2$, siis peab $\frac{9}{2m-1}$ olema täisarv, millest $m = 1$, $m = 2$ või $m = 5$. Kui $n = 3$, siis peab $\frac{28}{3m-1}$ olema täisarv, millest $m = 1$ või $m = 5$. Olgu edaspidi $n > 3$.

Tähistame $h = \frac{n^3+1}{mn-1}$, kus h on vastavalt eeldusele positiivne täisarv. Siis $n^3 + 1 = (mn-1)h$ ning

$$1 \equiv n^3 + 1 \equiv (mn-1)h \equiv (-1) \cdot h \pmod{n},$$

millest $h \equiv -1 \pmod{n}$. Olgu $h = kn - 1$, kus k on mingi positiivne täisarv. Nüüd $n^3 + 1 = (mn-1)(kn-1) = mkn^2 - (m+k)n + 1$, mis tähendab, et

$$n^2 = mkn - (m+k) . \tag{1}$$

Seega arv $m + k$ jagub arvuga n.

Paneme tähele, et kui $m+k \geqslant 3n$, siis tingimuse $n > 3$ tõttu ei saa arvud m ja k olla korraga väiksemad kui $n+2$. Siis aga

$$\begin{aligned} n^3+1 &= (mn-1)(kn-1) \geqslant ((n+2)n-1)(n-1) = \\ &= n^3+n^2-3n+1 = n^3+1+n(n-3) > n^3+1 \,, \end{aligned}$$

vastuolu. Seega peab olema kas $m+k=n$ või $m+k=2n$.

Olgu $m+k=n$. Võrduse (1) sümmeetrilisusest m ja $k=n-m$ suhtes järeldub, et kui lahendiks on paar (n,m), siis on lahendiks ka paar (n,k). Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et $m \geqslant k$, mistõttu $m \geqslant \frac{n}{2}$. Võrdusest (1) saame $n = m(n-m)-1$. Kui $m=n-1$, siis $n=m-1$, vastuolu. Kui $m=n-2$, siis $n=2(n-2)-1$, millest $n=5$: nii saame lahenditeks arvupaarid $(2,5)$ ja $(3,5)$. Kui aga $m<n-2$, siis $n-m \geqslant 3$ ning $n = m(n-m)-1 \geqslant 3m-1 \geqslant \frac{3n}{2}-1 > n$, vastuolu.

Vaatleme lõpuks juhtu, kui $m+k=2n$. Võrdusest (1) saame nüüd $n+2 = m(2n-m)$. Samuti nagu eelmises lõigus võime eeldada, et $m \geqslant k$, millest $m \geqslant n$. Kui $m=2n-1$, siis $n+2=2n-1$, mis on vastuolus eeldusega $n>3$. Seega $2n-m \geqslant 2$, mis tähendab, et $n+2 = m(2n-m) \geqslant 2m \geqslant 2n > n+2$, vastuolu.

5. Võttes võrduses (i) $x=y$, saame $f(a(x)) = a(x)$, kus

$$a(x) = x + f(x) + xf(x) \,.$$

Võttes nüüd võrduses (i) $x=y=a(x)$, saame, et $f(b(x)) = b(x)$, kus

$$b(x) = 2a(x) + (a(x))^2 = a(x)\cdot\big(a(x)+2\big)\,.$$

Kui nüüd $-1 < a(x) < 0$, siis $-1 < b(x) < a(x) < 0$, ning kui $a(x) > 0$, siis $b(x) > a(x) > 0$. Et $\frac{f(a(x))}{a(x)} = \frac{f(b(x))}{b(x)} = 1$, saame mõlemal juhul vastuolu tingimusega (ii). Seega peab mistahes x korral hulgast S kehtima võrdus $a(x) = x+f(x)+xf(x) = 0$, ehk $f(x) = -\frac{x}{x+1}$.

Teiselt poolt on lihtne veenduda, et funktsioon $f(x) = -\frac{x}{x+1}$ rahuldab ülesande tingimusi. Tõepoolest, mistahes x ja y korral hulgast S saame

$$f(x+f(y)+xf(y)) = -\frac{x-\dfrac{y}{y+1}-\dfrac{xy}{y+1}}{x-\dfrac{y}{y+1}-\dfrac{xy}{y+1}+1} = \frac{y-x}{x+1}$$

ning

$$y+f(x)+yf(x) = y-\frac{x}{x+1}-\frac{xy}{x+1} = \frac{y-x}{x+1}\,.$$

Ka on ilmne, et funktsioon $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{-\dfrac{x}{x+1}}{x} = -\dfrac{1}{x+1}$ on rangelt kasvav vahemikes $-1 < x < 0$ ja $0 < x$.

Märkus. Mistahes arvude x ja y korral hulgast S kuuluvad arvud $x+f(y)+xf(y)$ ja $y+f(x)+yf(x)$ hulka S, kuna

$$x+f(y)+xf(y) = (x+1)(f(y)+1)-1 > -1$$

ning analoogiliselt $y+f(x)+yf(x) > -1$.

6. Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ kõik algarvud kasvavas järjekorras. Koosnegu hulk A kõikidest niisugustest positiivsetest täisarvudest, mis esituvad mingi n erineva algarvu korrutistena, mis kõik on suuremad kui p_n. Näiteks kõik algarvud, välja arvatud arv 2, kuuluvad hulka A; arv 21 ei kuulu hulka A, sest ta on kahe erineva algarvu korrutis ning üks neist pole suurem kui $p_2 = 3$.

Olgu nüüd $S = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots\}$ mistahes lõpmatu algarvude hulk. Eeldame üldisust kitsendamata, et $p_{i_1} < p_{i_2} < \ldots$. Olgu s suvaline selline indeks, et $k = i_s \geqslant 2$. Siis arv $n = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}$ ei kuulu hulka A, sest ta on k erineva algarvu korrutis, millest vähemalt p_{i_1} kindlasti ei ole suurem arvust $p_k = p_{i_s}$. Arv $p_{i_{s+1}}p_{i_{s+2}}\ldots p_{i_{s+k-1}}$ aga kuulub hulka A, sest ta on k erineva algarvu korrutis, mis kõik on suuremad kui arv $p_k = p_{i_s}$. Seega on hulk A ülesandes nõutud omadusega.