1994.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Hongkongis, 13.–14. juulil 1994

Esimene päev

1. Olgu m ja n positiivsed täisarvud ning $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sellised erinevad elemendid hulgast $\{1, 2, \ldots, n\}$, mis rahuldavad tingimust: kui indeksite paari i ja j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m)$ korral $a_i + a_j \leqslant n$, siis leidub indeks k, $1 \leqslant k \leqslant m$ nii, et $a_i + a_j = a_k$. Tõesta, et

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

2. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk, kus $|AB| = |AC|$. Olgu lisaks sellele:
   (i) M külje BC keskpunkt ja O selline punkt sirgel AM, et sirged OB ja AB on risti;
   (ii) Q suvaline punkt lõigul BC, mis on erinev selle otspunktidest B ja C;
   (iii) E punkt sirgel AB ja F punkt sirgel AC, kusjuures E, Q ja F on erinevad punktid, mis asuvad ühel sirgel.

   Tõesta, et sirged OQ ja EF on risti siis ja ainult siis, kui $|QE| = |QF|$.

3. Mistahes positiivse täisarvu k korral tähistagu $f(k)$ niisuguste elementide arvu hulgas $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, mille kahendesituses on täpselt kolm numbrit 1.
   a) Tõesta, et iga positiivse täisarvu m jaoks leidub vähemalt üks selline positiivne täisarv k, et $f(k) = m$.
   b) Leia kõik niisugused positiivsed täisarvud m, mille jaoks leidub parajasti üks selline positiivne täisarv k, et $f(k) = m$.

1994.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Hongkongis, 13.–14. juulil 1994

Teine päev

4. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ on täisarv.

5. Olgu S kõikide arvust -1 suuremate reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : S \to S$, mis rahuldavad järgmist kaht tingimust:
   (i) $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x)$ iga x ja y korral hulgast S;
   (ii) funktsioon $\dfrac{f(x)}{x}$ on rangelt kasvav vahemikes $-1 < x < 0$ ja $0 < x$.

6. Tõesta, et leidub positiivsete täisarvude hulk A, millel on järgmine omadus: mistahes lõpmatu algarvude hulga S jaoks leidub täisarv $k \geqslant 2$ ning positiivsed täisarvud $m \in A$ ja $n \notin A$, millest kumbki esitub hulga S mingi k erineva elemendi korrutisena.