1993.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Oletame, et leidub lahutus $f(x) = g(x)h(x)$, kus

$$g(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_0 ,$$
$$h(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_0 ,$$

$k, m \geqslant 1$ ning kõik kordajad c_i, b_j on täisarvud. Et $b_0 c_0 = 3$, võime üldisust kitsendamata eeldada, et $b_0 = \pm 1$, $c_0 = \pm 3$.

Oletame esmalt, et $k = 1$, s.t. $g(x) = x \pm 1$. Siis

$$h(x) = x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_0$$

ning polünoomi $f(x)$ ja korrutise $g(x)h(x)$ vastavaid kordajaid võrreldes leiame $|c_i| = 3$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, kuid $c_{n-2} \pm 1 = 5$ — vastuolu. Seega peab olema $k \geqslant 2$.

Vastavalt Gaussi teoreemile leiduvad kompleksarvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nii, et

$$g(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k) .$$

Et mistahes $i = 1, \ldots, k$ korral kehtib võrdus $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)h(\alpha_i) = 0$, s.t.

$$\alpha_i^{n-1}(5 + \alpha_i) = -3 ,$$

siis

$$|\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k|^{n-1} |(5 + \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (5 + \alpha_k)| = 3^k .$$

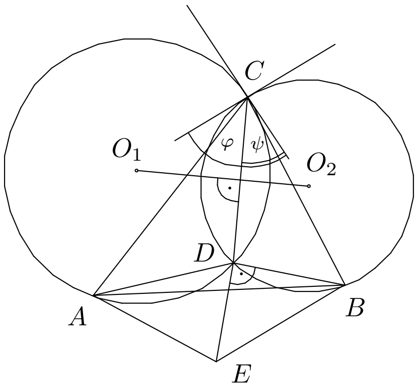
Viete'i valemitest saame $|\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k| = 1$, mistõttu

$$|g(-5)| = |(5 + \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (5 + \alpha_k)| = 3^k .$$

Teisest küljest, $g(-5)h(-5) = f(-5) = 3$. Et $g(-5)$ ja $h(-5)$ on mõlemad täisarvud, siis $|g(-5)| \leqslant 3$, s.t. $k \leqslant 1$. Saadud vastuolu näitab, et nõutud omadustega polünoome $g(x)$, $h(x)$ ei leidu.

2. a) Valime tasandil punkti E nii, et $ED = BD$, $\angle EDB = 90^\circ$ ning punktid A ja E asuvad samal pool sirget BD (vt. joonist 1). Siis $\angle ADE = \angle ACB$. Et $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$, siis on kolmnurgad ACB ja ADE sarnased. Seega $\angle BAC = \angle EAD$ ja $\angle DAC = \angle EAB$ ning samuti $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$. Viimasest võrdest saame $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$, mistõttu kolmnurgad DAC ja EAB on sarnased, s.t. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD}$. Nüüd leiame

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2} \cdot \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BE} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{AB}{AC} : \frac{BE}{CD} \right) = \sqrt{2}\,.$$



Joonis 1

b) Olgu O_1, O_2 vastavalt kolmnurkade CAD, CBD ümberringjoonte keskpunktid ja moodustagu neile ringjoontele punktis C tõmmatud puutujad lõiguga CD vastavalt nurgad ψ, φ (vt. joonist 1). Siis

$$\varphi = 90^\circ - \angle O_2CD = \angle CO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle CO_2D = \angle CBD$$

(piirdenurk moodustab poole samale kaarele toetuvast kesknurgast) ning analoogiliselt $\psi = \angle CAD$. Vaadeldavate puutujate vaheline nurk on

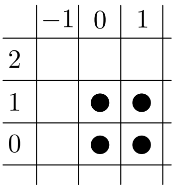
$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= \angle CAD + \angle CBD = 180^\circ - \angle ACB - \angle DAB - \angle DBA = \\ &= \angle ADB - \angle ACB = \angle ADB - \angle ADE = \angle EDB = 90^\circ\,,\end{aligned}$$

s.t. need puutujad on risti.

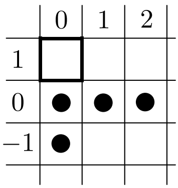
3. a) Juht $n = 3k$. Tähistame mänguvälja ruudud täisarvude paaridega (x, y), kus $x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nimetame *diagonaaliks* selliste ruutude hulka, mille korral $x + y$ on konstant. Vaatleme kolme liiki diagonaale: $x + y = 3s$, $x + y = 3s - 1$ ja $x + y = 3s + 1$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; olgu neil paiknevate nuppude arvud t käigu järel vastavalt $N_0(t)$, $N_{-1}(t)$ ja $N_1(t)$. Mängu algul paikneb üht liiki diagonaalidel

$$3k + 6(1 + 2 + \ldots + (k - 1)) = 3k^2$$

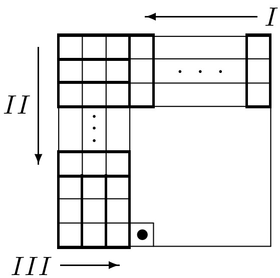
nuppu ja kumbagi ülejäänud liiki diagonaalidel $\frac{1}{2}(9k^2 - 3k^2) = 3k^2$ nuppu, seega $N_0(0) = N_{-1}(0) = N_1(0) = 3k^2$. Et iga käiguga vähenevad kaks arvudest N_0, N_{-1}, N_1 ühe võrra ja kolmas neist suureneb ühe võrra, siis on arvud $N_0(t)$, $N_{-1}(t)$ ja $N_1(t)$ mistahes $t = 0, 1, 2, \ldots$ korral ühe ja sama paarsusega. Kui nüüd mängu lõpuks jääks lauale üks nupp, siis peaksid kaks arvudest $N_0(n^2 - 1)$, $N_{-1}(n^2 - 1)$ ja $N_1(n^2 - 1)$ olema nullid ja kolmas võrdne ühega, mis ei ole võimalik.



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

b) Juht $n = 3k \pm 1$. Kui $n = 2$ ja nupud paiknevad nii nagu joonisel 2, saab mängu nõutaval viisil lõpetada käikudega $(1, 0) \to (-1, 0)$, $(1, 1) \to (-1, 1)$ ja $(-1, 0) \to (-1, 2)$. Paiknegu nüüd neli nuppu "nurgana" nii, nagu näidatud joonisel 3. (Ruut $(0, 1)$ on tühi!) Siis saame käikudega $(0, -1) \to (0, 1)$, $(2, 0) \to (0, 0)$ ja $(0, 1) \to (0, -1)$ eemaldada kolm kõrvutiseisvat nuppu, kusjuures ülejäänud nuppude asend ei muutu. Kasutades seda võtet korduvalt (vt. joonist 4), saame algseisust $n \geqslant 4$ korral jõuda samasuguse seisuni $n - 3$ korral. Nii jätkates jääb lõpuks lauale üksainus nupp või algseis $n = 2$ korral, mis on juba eespool vaadeldud.

Seega võib mängu lõpuks lauale jääda üks nupp parajasti siis, kui $n \neq 3k$.

Teine päev

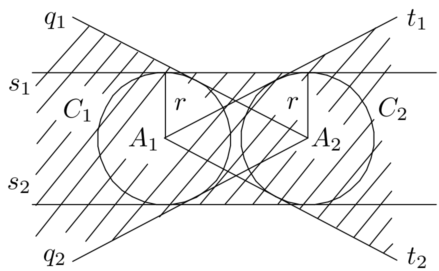
4. Tähistagu edaspidi $d(P, QR)$ punkti P kaugust punktidega Q ja R määratud sirgest ning $S(PQR)$ kolmnurga PQR pindala. Siis

$$m(PQR) = \min\bigl(d(P, QR), d(Q, PR), d(R, PQ)\bigr) = \\ = \frac{2S(PQR)}{\max(PQ, PR, QR)}$$

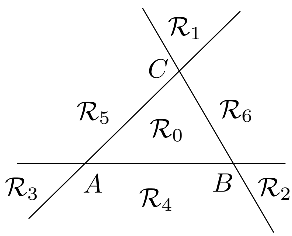
mistahes kolmnurga PQR korral.

Tõestame kõigepealt **lemma:**
mistahes antud punktide A_1, A_2 ja positiivse arvu $r < A_1A_2$ korral kehtib võrratus $m(XA_1A_2) \leqslant r$ siis ja ainult siis, kui punkt X asub joonisel 5 viirutatud alas või selle rajajoonel.

Tõepoolest: $d(X, A_1A_2) \leqslant r$ parajasti siis, kui punkt X asub ringjoonte C_1 ja C_2 ühiste puutujate s_1, s_2 vahelises ribas; $d(A_1, XA_2) \leqslant r$ parajasti siis, kui punkt X asub ringjoonele C_1 punktist A_2 tõmmatud puutujatega q_1, q_2 määratud sektoris; $d(A_2, XA_1) \leqslant r$ parajasti siis, kui punkt X asub ringjoonele C_2 punktist A_1 tõmmatud puutujatega t_1, t_2 määratud sektoris.



Joonis 5



Joonis 6

Olgu nüüd punktid A, B, C mingi kolmnurga tippudeks, kusjuures üldisust kitsendamata eeldame, et $AB \geqslant AC$ ja $AB \geqslant BC$. (Kui punktid

A, B, C asuvad ühel sirgel, siis $m(ABC) = 0$ ja nõutud võrratus ilmselt kehtib.) Tähistame $r = m(ABC) = d(C, AB)$, siis $r \leqslant d(A, BC)$, $r \leqslant d(B, AC)$ ning $r < AB$, $r < BC$ ja $r < AC$. Vaatleme eraldi kolme juhtu olenevalt punkti X asukohast kolmnurga ABC suhtes (vt. joonist 6), seejuures loeme igasse piirkonda $\mathcal{R}_i$ kuuluvaks ka tema rajajoone.

a) $X \in \mathcal{R}_0$. Siis $AX \leqslant \max(AB, AC) = AB$ ning analoogiliselt saame $BX \leqslant AB$ ja $CX \leqslant AB$. Seepärast, jagades võrduse

$$S(ABC) = S(ABX) + S(BCX) + S(ACX)$$

kõik liikmed läbi külje AB pikkusega, saame

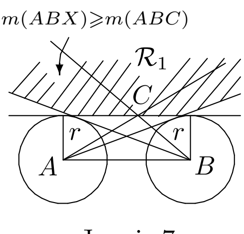
$$\begin{aligned} m(ABC) &= m(ABX) + \frac{S(BCX)}{AB} + \frac{S(ACX)}{AB} \leqslant \\ &\leqslant m(ABX) + m(BCX) + m(ACX)\,. \end{aligned}$$

b) $X \in \mathcal{R}_1$. Et $r < AB$, siis vastavalt lemmale $m(ABC) \leqslant m(ABX)$ (vt. joonist 7). Analoogiliselt $m(ABC) \leqslant m(ACX)$, kui $X \in \mathcal{R}_2$ (joonis 8), ja $m(ABC) \leqslant m(BCX)$, kui $X \in \mathcal{R}_3$.

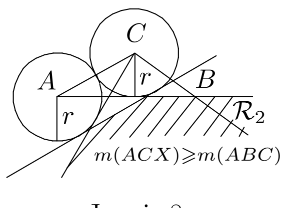
c) $X \in \mathcal{R}_4$. Lõigaku punktidega C, X määratud sirge lõiku AB punktis Y (vt. joonis 9). Et $m(ABY) = 0$, $Y \in \mathcal{R}_0$ ning vastavalt eelmises punktis tõestatule $m(BCY) \leqslant m(BCX)$ ja $m(ACY) \leqslant m(ACX)$, siis

$$\begin{aligned} m(ABC) &\leqslant m(ABY) + m(BCY) + m(ACY) \leqslant \\ &\leqslant m(BCX) + m(ACX)\,. \end{aligned}$$

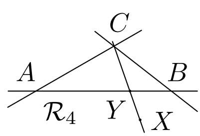
Analoogiliselt saame, et $m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(BCX)$, kui $X \in \mathcal{R}_5$, ning $m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(ACX)$, kui $X \in \mathcal{R}_6$.



Joonis 7



Joonis 8



Joonis 9

5. Kontrollime, et funktsioon $f(x) = \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right]$, kus $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, rahuldab kõiki nõutud tingimusi.

1) Et $2 < \sqrt{5} < 3$, siis $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ ja $f(1) = \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = 2$.

2) Olgu $n \in \mathbb{N}$ mistahes naturaalarv, siis

$$
\begin{aligned}
f(n+1) - f(n) &= \left[\alpha(n{+}1) + \frac{1}{2}\right] - \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] = \\
&= \left[\alpha(n{+}1) + \frac{1}{2}\right] - \left(\alpha(n{+}1) + \frac{1}{2}\right) + \\
&\qquad + \left(\alpha n + \frac{1}{2}\right) - \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] + \alpha(n{+}1) - \alpha n > \\
&> -1 + 0 + 1 = 0\,,
\end{aligned}
$$

s.t. $f(n+1) > f(n)$.

3) Paneme tähele, et $x - \frac{1}{2} < \left[x + \frac{1}{2}\right] \leqslant x + \frac{1}{2}$ iga reaalarvu x korral ning $\alpha^2 - \alpha = 1$. Vaatleme funktsiooni

$$
g(n) = f(f(n)) - f(n) = \left[\alpha\left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\right] - \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right]\,.
$$

Saame võrratused:

$$
\begin{aligned}
g(n) &> \alpha\left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} - \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] = (\alpha - 1)\left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} > \\
&> (\alpha - 1)\left(\alpha n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = (\alpha^2 - \alpha)n - \frac{\alpha}{2} > n - 1
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
g(n) &\leqslant \alpha\left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} - \left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] = (\alpha - 1)\left[\alpha n + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} \leqslant \\
&\leqslant (\alpha - 1)\left(\alpha n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (\alpha^2 - \alpha)n + \frac{\alpha}{2} < n + 1\,.
\end{aligned}
$$

Et n ja $g(n)$ on mõlemad täisarvud, siis järeldub neist võrratustest, et

$$
g(n) = f(f(n)) - f(n) = n\,.
$$

Märkus. Funktsiooni $f(n)$ konstrueerimiseks on ka teisi võimalusi:

1) (Peeter Laud) Konstrueerime jadad $F_k = \{F_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$ järgmisel viisil:

a) $F_{1,1} = 1$, $F_{1,2} = 2$, $F_{1,i} = F_{1,i-2} + F_{1,i-1}$ $(i \geqslant 3)$;

b) Olgu juba konstrueeritud jadad $F_1, \ldots, F_{s-1}$. Siis $F_{s,1}$ on vähim naturaalarv n, mis ei kuulu ühessegi neist jadadest, $F_{s,2} = F_{k,i+1} + 1$, kus $F_{k,i} = n - 1$, ning $F_{s,i} = F_{s,i-2} + F_{s,i-1}$, kui $i \geqslant 3$.

Nüüd defineerime $f(n) = F_{k,i+1}$, kui $n = F_{k,i}$ (siin tuleb muidugi kõigepealt tõestada, et jadad F_k ei sisalda ühiseid elemente).

2) $f(1) = 2$ ning $f(n) = n + \max\{\, i < n \mid f(i) \leqslant n \,\}$, kui $n \geqslant 2$.

6. Esitame lampide $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ seisundid mingil ajahetkel vektorina $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, kus $v_i = 1$, kui lamp L_i on seisundis PÕLEB, ja $v_i = 0$, kui lamp L_i on seisundis EI PÕLE. Lülitusi S_j vaatleme kui kõigi niisuguste vektorite hulga V teisendusi:

$$S_j(v_0, \ldots, v_{j-1}, v_j, \ldots, v_{n-1}) = (v_0, \ldots, v_{j-1}, v_j + v_{j-1}, \ldots, v_{n-1}),$$

kus liitmine toimub "mod 2", s.t. $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ ja $1 + 1 = 0$, ning kõiki indekseid tõlgendame "mod n", s.t. $v_{-1} = v_{n-1}$ ja $S_{rn+j} = S_j$, $r = 0, 1, \ldots$. Toome sisse teisenduse *Rot* hulgal V:

$$Rot(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)\ .$$

On lihtne veenduda, et $S_j = Rot^{-j} \cdot S_0 \cdot Rot^j$, kus teisenduste korrutamise all mõistame nende järjest rakendamist suunaga paremalt vasakule, Rot^{-1} on teisenduse *Rot* pöördteisendus:

$$Rot^{-1}(v_0, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}) = (v_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-2})$$

ning $Rot^{-j} = (Rot^{-1})^j$. Seega

$$\begin{aligned} S_r \cdot S_{r-1} \cdot \ldots \cdot S_1 S_0 &= (Rot^{-1})^r \cdot S_0 \cdot Rot \cdot S_0 \cdot \ldots \cdot Rot \cdot S_0 = \\ &= (Rot^{-1})^{r+1} \cdot (Rot \cdot S_0)^r\ . \end{aligned}$$

Tähistame $S^* = Rot \cdot S_0$. Et teisendus Rot^{-1} jätab vektori $(1, \ldots, 1)$ muutmata, siis piisab ülesande lahendamiseks kontrollida, et

$$(S^*)^{M(n)}(1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1)$$

vastava astendaja $M(n)$ korral.

a) Paneme tähele, et teisendusel S^* leidub pöördteisendus $(S^*)^{-1}$. Tõepoolest, $S_0^{-1} = S_0$ ja $(Rot \cdot S_0)^{-1} = S_0 \cdot Rot^{-1}$, s.t. mistahes vektori $(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in V$ korral

$$S^*(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_{n-1} + v_0)$$

ja

$$(S^*)^{-1}(v_0, v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}) = (v_{n-1} + v_{n-2}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-2}) .$$

Et vektorite hulk V on lõplik (sisaldab 2^n elementi), siis leiduvad niisugused naturaalarvud $r > t$, et kehtib võrdus

$$(S^*)^r(1, \ldots, 1) = (S^*)^t(1, \ldots, 1) .$$

Rakendades selle võrduse mõlemale poolele veel teisendust $(S^*)^{-t}$, saame $(S^*)^{r-t}(1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1)$, s.t. võime võtta $M(n) = r - t$.

b) Induktsiooni abil veendume, et mistahes vektori $(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in V$ ja indeksite $r = 1, 2, \ldots, n-1$ korral

$$(S^*)^r(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \\ = (\underbrace{v_r, v_{r+1}, \ldots, v_{n-1}}_{n-r}, \underbrace{v_0{+}v_{n-1}, v_0{+}v_1{+}v_{n-1}, \ldots, v_0{+}\ldots{+}v_{r-1}{+}v_{n-1}}_{r}).$$

Seega

$$(S^*)^{n-1}(v_0, \ldots, v_{n-1}) = (v_{n-1}, v_0{+}v_{n-1}, \ldots, v_0{+}v_1{+}\ldots{+}v_{n-2}{+}v_{n-1})$$

ja

$$(S^*)^n(v_0, \ldots, v_{n-1}) = \\ = (v_0{+}v_{n-1}, v_0{+}v_1{+}v_{n-1}, \ldots, v_0{+}\ldots{+}v_{n-2}{+}v_{n-1}, v_0{+}\ldots{+}v_{n-2}) .$$

Arvestades ülaltoodud liitmisreegleid ja seda, et $n = 2^k$, saame

$$\begin{aligned} (S^*)^{n-1}(1, \ldots, 1) &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0) , \\ (S^*)^{2n-1}(1, \ldots, 1) &= (1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots, 0, 0) . \end{aligned}$$

Induktsiooniga r järgi veendume, et

$$(S^*)^{2^r n-1}(1, \ldots, 1) =$$

$$= (\underbrace{1,\ldots,1}_{2^r},\underbrace{0,\ldots,0}_{2^r},\underbrace{1,\ldots,1}_{2^r},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0}_{2^r}) \ ,$$

kus $r = 1, 2, \ldots, k$, ja seega $(S^*)^{n^2-1}(1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1)$.

c) Sarnaselt eelmise juhuga saame:

$$\begin{aligned}(S^*)^n(1,\ldots,1) &= (0,1,0,1,0,1,0,\ldots,1,0) \ ,\\ (S^*)^{2n}(1,\ldots,1) &= (0,1,1,0,0,1,1,\ldots,0,0) \ .\end{aligned}$$

Induktsiooniga r järgi veendume, et

$$(S^*)^{2^r n}(1,\ldots,1) = (0,\underbrace{1,\ldots,1}_{2^r},\underbrace{0,\ldots,0}_{2^r},\underbrace{1,\ldots,1}_{2^r},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0}_{2^r}) \ ,$$

kus $r = 1, 2, \ldots, k$, s.t.

$$(S^*)^{(n-1)n}(1,\ldots,1) = (0,1,\ldots,1) \ .$$

Rakendades vektorile $(0, 1, \ldots, 1)$ veelkord teisendust S^*, saamegi nõutava võrduse

$$(S^*)^{(n-1)n+1}(1,\ldots,1) = (1,\ldots,1) \ .$$

Märkus: lahendust saab muuta kompaktsemaks, seades igale vektorile $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ vastavusse polünoomi

$$P(x) = v_{n-2} + v_{n-3}x + \ldots + v_0 x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1}$$

(mille kordajate liitmine toimub lahenduse alguses toodud reeglite kohaselt). Vektorile $(S^*)^r(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ vastab siis ülimalt $(n-1)$-astme polünoom $Q_r(x)$, mis rahuldab tingimust

$$Q_r(x) \equiv x^r P(x) \pmod{(x^n + x^{n-1} + 1)}$$

(iga polünoomi $P(x)$ jaoks leidub parajasti üks selline polünoom $Q_r(x)$). Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et

$$x^{M(n)} \equiv 1 \pmod{(x^n + x^{n-1} + 1)} \ ,$$

siis $Q_{M(n)}(x) = P(x)$.