# 1993.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

## Istanbulis, 18.–19. juulil 1993

### Esimene päev

1. Olgu $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, kus $n > 1$ on täisarv. Tõesta, et $f(x)$ ei ole esitatav kahe täisarvuliste kordajatega polünoomi korrutisena, mille mõlema aste on vähemalt $1$.

2. Teravnurkse kolmnurga $ABC$ sees võetakse punkt $D$ nii, et kehtivad võrdused $\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$ ja $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

   a) Leia suhte $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ väärtus;

   b) Tõesta, et kolmnurkade $ACD$ ja $BCD$ ümberringjoontele punktis $C$ tõmmatud puutujad on teineteisega risti.

3. Lõpmatul malelaual mängitakse järgmist mängu. Mängu algul paiknevad $n^2$ nuppu ruudukujulisel alal mõõtmetega $n \times n$ ruutu, igal ruudul üks nupp. Igal käigul tõstetakse üks nupp horisontaal- või vertikaalsuunas üle tema kõrval asuva nupu vahetult selle taga asuvale vabale ruudule. Seejuures eemaldatakse nupp, üle mille tõsteti, laualt.

   Leia kõik $n$ väärtused, mille korral võib mängu lõpuks lauale jääda üks nupp.

# 1993.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

## Istanbulis, 18.–19. juulil 1993

### Teine päev

4. Tasandil paikneva kolme punkti $P$, $Q$ ja $R$ korral tähistagu $m(PQR)$ kolmnurga $PQR$ lühima kõrguse pikkust (kui punktid $P$, $Q$, $R$ on ühel sirgel, siis $m(PQR) = 0$). Olgu tasandil antud punktid $A$, $B$ ja $C$. Tõesta, et

   $$m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

   tasandi mistahes punkti $X$ korral.

5. Olgu $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Kas leidub funktsioon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nii et

   $$f(1) = 2\,,$$

   $$f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

   ja

   $$f(n) < f(n+1) \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral?}$$

6. Olgu $n > 1$ täisarv. Ringjoonel asuvad $n$ lampi $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$. Igal lambil on kaks seisundit: PÕLEB ja EI PÕLE. Lülituste jada $S_0$, $S_1$, …, $S_i, \ldots$ on määratud järgmiselt:
   - lülitus $S_j$ mõjutab ainult lambi $L_j$ seisundit ega mõjuta ülejäänud lampide seisundit;
   - kui lamp $L_{j-1}$ on seisundis PÕLEB, siis $S_j$ muudab lambi $L_j$ seisundit, s.t. viib selle lambi seisundist PÕLEB seisundisse EI PÕLE või seisundist EI PÕLE seisundisse PÕLEB;
   - kui lamp $L_{j-1}$ on seisundis EI PÕLE, siis $S_j$ ei muuda lambi $L_j$ seisundit.

   Lambid on nummerdatud "mod $n$", s.t.

   $$L_{-1} = L_{n-1}, \quad L_0 = L_n, \quad L_1 = L_{n+1}, \quad \text{jne.}$$

   Algul on kõik lambid seisundis PÕLEB. Näita, et:

   a) leidub positiivne täisarv $M(n)$, nii et $M(n)$ lülituse järel on kõik lambid jälle seisundis PÕLEB;

   b) kui $n$ on esitatav kujul $2^k$, siis on kõik lambid seisundis PÕLEB $n^2 - 1$ lülituse järel;

   c) kui $n$ on esitatav kujul $2^k + 1$, siis on kõik lambid seisundis PÕLEB $n^2 - n + 1$ lülituse järel.