1992.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Moskvas, 15.–16. juulil 1992

Esimene päev

1. Leia kõik sellised täisarvud a, b, c, et $1 < a < b < c$ ja $(a-1)(b-1)(c-1)$ on $(abc-1)$ jagaja.

2. Leia kõik sellised funktsioonid $f : R \to R$, et

   $$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

   iga $x, y \in R$ puhul.

3. Ruumis on antud 9 punkti, milledest ükski neli ei asu ühel ja samal tasandil. Kõik need punktid on paarikaupa ühendatud lõikudega. Lõigud võivad olla värvitud kas siniseka või punaseks või jäetud värvimata. Leia vähim selline arv n, et ükskõik kuidas ka ei värviks täpselt n lõiku, leidub alati selline kolmnurk, mille kõik servad on ühte ja sama värvi.

1992.a. rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad

Moskvas, 15.–16. juulil 1992

Teine päev

4. Tasandil on antud ringjoon C, selle puutujasirge l ja punkt M sirgel l. Leia kõigi selliste punktide P lookus, et sirgel L leiduvad punktid Q ja R nii, et
   1) C on kolmnurga PQR siseringjoon;
   2) M on lõigu QR keskpunkt.

5. Olgu S lõplik punktihulk vaadeldavas xyz-ruumis ja S_x, S_y, S_z hulga S kõikide punktide ristprojektsioonide hulk vastavalt yz-, xz- ja xy-tasandile. Tõesta, et

   $$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

6. Iga positiivse täisarvu n korral olgu $S(n)$ suurim selline täisarv, et iga $k \leqslant S(n)$ korral on n^2 võimalik esitada k positiivse täisruudu summana.
   a) Näita, et $S(n) \leqslant n^2 - 14$ iga $n \geqslant 4$ korral;
   b) Leia seline täisarv n, et $S(n) = n^2 - 14$;
   c) Näita, et leidub lõpmata palju selliseid täisarve n, et $S(n) = n^2 - 14$.