Balti Tee 2015
7. november 2015

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Tohib kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Language: Estonian

1. Võrdkülgne kolmnurk jagatakse n^2 võrdseks väiksemaks võrdkülgseks kolmnurgaks, $n \geq 2$. Leia kõik võimalused, kuidas $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ tippu saab kirjutada reaalarvud selliselt, et alati kui kolm tippu moodustavad kolmnurga, mille küljed on paralleelsed suure kolmnurga külgedega, on neisse kirjutatud reaalarvude summa null.

2. Olgu n positiivne täisarv ja olgu $a_1, \ldots, a_n$ sellised reaalarvud, et $0 \leq a_i \leq 1$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral. Tõesta võrratus
$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \cdots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \cdots a_n)^n.$$

3. Olgu $n > 1$ täisarv. Leia kõik mittekonstantsed reaalarvulised polünoomid $P(x)$, mis iga reaalarvu x korral rahuldavad võrdust
$$P(x)P(x^2)P(x^3) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

4. Perekonnas kantakse kolme värvi riideid: punaseid, siniseid ja rohelisi. Iga värvi jaoks kasutatakse oma pesukorvi (pesukorvid on ühesugused), mis on esimese nädala algul kõik tühjad. Igal nädalal tekib peres 10 kg musta pesu (iga värvi osakaal võib muutuda). Pesu sorteeritakse värvi järgi ja pannakse korvidesse. Seejärel kõige raskem korv tühjendatakse (kui selliseid on mitu, siis ainult üks neist) ning tema sisu pestakse puhtaks. Milline on pesukorvide minimaalne mahutavus, et kunagi ei saaks tekkida ületäituvus?

5. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, mis kõigi reaalarvude x ja y korral rahuldavad võrdust
$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)).$$

6. Kaks mängijat mängivad järgmist mängu. Algul on kaks kuhja, kus on vastavalt 10000 ja 20000 münti. Igal käigul võib kas eemaldada ühest kuhjast suvalise positiivse arvu münte, või eemaldada ühest kuhjast $x > 0$ münti ja teisest $y > 0$ münti, kus $x + y$ jagub 2015-ga. Käike tehakse kordamööda, mängija, kes ei saa enam käiku teha, kaotab. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

7. Maleklubis on 100 liiget. Iga klubi liige mängis täpselt 56 teise klubi liikmega. Klubi juhatuses, mis koosneb 50 liikmest, mängisid kõik üksteisega läbi. Tõesta, et kogu klubi saab jagada kaheks grupiks nii, et igas grupis mängisid kõik üksteisega läbi.

8. Inspireerituna ristkülikukujulisest teedevõrgust New Yorgis nimetame kahe tasandi punkti (a, b) ja (c, d) vaheliseks *Manhattani kauguseks* arvu
$$|a - c| + |b - d|.$$
Olgu S tasandi mingi punktide hulk. Leiduvad kaks erinevat reaalarvu nii, et iga kahe erineva hulga S punkti vaheline Manhattani kaugus on võrdne ühega neist. Mis on hulga S maksimaalne võimalik punktide arv?

9. Olgu $n > 2$ täisarv. Kaardipakis on $\frac{n(n-1)}{2}$ kaarti, mis on nummerdatud
$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{n(n-1)}{2}.$$
Nimetame kahte kaarti *maagiliseks paariks*, kui nende numbrid on kas kaks järjestikust arvu, või nende numbrid on 1 ja $\frac{n(n-1)}{2}$.
Milliste n väärtuste jaoks on võimalik jaotada kõik kaardid n virna nii, et iga kahe virna kaartide hulgas leidub täpselt üks maagiline paar?

10. Hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ alamhulk S on *tasakaalus* kui iga $a \in S$ korral leidub $b \in S$, $b \neq a$, nii et $\frac{a+b}{2} \in S$.
    (a) Olgu $k > 1$ täisarv ja olgu $n = 2^k$. Näita, et hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ iga alamhulk S, mille korral $|S| > \frac{3n}{4}$, on tasakaalus.
    (b) Kas leidub arv $n = 2^k$, kus $k > 1$ on täisarv, nii et hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ iga alamhulk S, mille korral $|S| > \frac{2n}{3}$, on tasakaalus?

11. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalid lõikuvad puktis E. Nurkade $\angle DAE$ ja $\angle EBC$ poolitajad lõikuvad punktis F. Eeldades, et $ECFD$ on rööpkülik, leia suhe $|AB| : |AD|$.

12. Ringjoon läbib kolmnurga ABC tippu B, lõikab külgesid AB ja BC vastavalt punktides K ja L ning puutub külge AC selle keskpunktis M. Valime kaarel BL (mis ei sisalda punkti K) punkti N selliselt, et $\angle LKN = \angle ACB$. Eeldades, et kolmnurk CKN on võrdkülgne, leia $\angle BAC$.

13. Olgu D kolmnurga ABC tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt ja olgu $|AB| = 1$. Kolmnurga BCD siseringjoone keskpunkt langeb kokku kolmnurga ABC mediaanide lõikepunktiga. Leia külgede AC ja BC pikkused.

14. Erikülgse kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt D asub küljel BC. Olgu M külje BC keskpunkt ja olgu N punkti M peegeldus punkti D suhtes. Kolmnurga AMN ümberringjoon lõikab külge AB punktis $P \neq A$ ja külge AC punktis $Q \neq A$. Tõesta, et AN, BQ ja CP lõikuvad samas punktis.

15. Kolmnurga ABC nurga $\angle BAC$ sisenurga poolitaja ja välisnurga poolitaja lõikuvad sirgega BC vastavalt punktides D ja E. Olgu F sirge AD teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja olgu D' punkti D peegeldus punkti O suhtes. Tõesta, et $\angle D'FE = 90°$.

16. Olgu $P(n)$ arvu n suurim algarvuline jagaja. Leia kõik täisarvud $n \geq 2$, mille korral
$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor.$$
    (Märkus: $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa x.)

17. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $n^{n-1} - 1$ jagub arvuga 2^{2015}, aga ei jagu arvuga 2^{2016}.

18. Olgu $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polünoom astmega $n \geq 1$, millel on n (mitte tingimata erinevat) täisarvulist juurt. Leidugu erinevad algarvud $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ nii, et iga $i = 0, \ldots, n-1$ korral on $a_i > 1$ algarvu p_i aste. Leia kõik võimalikud n väärtused.

19. Kolm paarikaupa erinevat positiivset täisarvu a, b, c, kus $\text{SÜT}(a, b, c) = 1$, rahuldavad tingimusi
$$a \mid (b-c)^2, \qquad b \mid (c-a)^2 \qquad \text{ja} \qquad c \mid (a-b)^2.$$
    Tõesta, et ei leidu kolmnurka (tippudega, mis ei asu samal sirgel), mille küljed on pikkustega a, b, c.

20. Iga täisarvu $n \geq 2$ korral olgu A_n selliste positiivsete täisarvude m arv, millel on järgnev omadus: arvu n kaugus lähimast arvu m mittenegatiivsest kordsest on sama, mis arvu n^3 kaugus lähimast arvu m mittenegatiivsest kordsest. Leia kõik arvud $n \geq 2$, mille korral A_n on paaritu.
    (Märkus: Arvude a ja b vaheline kaugus on $|a - b|$.)