Baltic Way

8. november 2014, Vilnius

Language: **Estonian**

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Tohib kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Näita, et

$$\cos(56^\circ)\cdot\cos(2\cdot 56^\circ)\cdot\cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56^\circ)=\frac{1}{2^{24}}.$$

Ülesanne 2. Olgu $a_0, a_1, \ldots, a_N$ reaalarvud, mis rahuldavad tingimusi $a_0 = a_N = 0$ ja

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2$$

iga $i = 1, 2, \ldots, N-1$ korral. Tõesta, et $a_i \leqslant 0$ iga $i = 1, 2, \ldots, N-1$ korral.

Ülesanne 3. Positiivsed reaalarvud a, b, c rahuldavad tingimust $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ülesanne 4. Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigil reaalarvudel, annavad reaalarvulisi väärtusi ning mistahes reaalarvude x, y korral rahuldavad tingimust

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x).$$

Ülesanne 5. Positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtivad võrdused

$$a^2+d^2-ad=b^2+c^2+bc \qquad \text{ja} \qquad a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Leia avaldise $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 6. Reas on 16 tooli. Iga tool värvitakse kas punaseks või roheliseks nii, et sama värvi järjestikuste toolide arv on alati paaritu. Mitmel erineval viisil on võimalik seda teha?

Ülesanne 7. Olgu $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$ permutatsioon arvudest 1, 2, …, 30. Kui paljude permutatsioonide korral kehtib võrdus $\sum\limits_{k=1}^{30}|p_k-k|=450$?

Ülesanne 8. Albert ja Betty mängivad järgmist mängu. On olemas punane kauss, kus on 100 sinist palli, ja sinine kauss, kus on 100 punast palli. Igal käigul teeb mängija üht järgnevast:

a) Võtab kaks punast palli sinisest kausist ja paneb need punasesse kaussi.

b) Võtab kaks sinist palli punasest kausist ja paneb need sinisesse kaussi.

c) Võtab ühest kausist kaks erinevat värvi palli ja viskab need minema.

Käigud tehakse vaheldumisi ja Albert alustab. Võidab mängija, kes esimesena võtab punasest kausist viimase sinise palli või sinisest kausist viimase punase palli. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

Ülesanne 9. Milline on vähim võimalik arv ruute, mis saab märkida $n \times n$ ruudustikus nii, et iga $m > \frac{n}{2}$ korral on mistahes $m \times m$ alamruudu mõlemal diagonaalil vähemalt üks märgitud ruut?

Ülesanne 10. Riigis on 100 lennujaama. Lennufirma Super-Air lendab teatud lennujaamade vahel (liinid on kahesuunalised). Lennujaama *koormus* on selliste lennujaamade arv, kuhu Super-Air sellest lennujaamast lendab. Uus lennufirma, Concur-Air, loob liinilennu kahe lennujaama vahel siis ja ainult siis, kui nende kahe lennujaama koormuste summa on vähemalt 100. Tuleb välja, et leidub selline ringreis (lõpetatakse samas lennujaamas, kus alustati), et ainult Concur-Air'ga lennates on võimalik maanduda kõigis lennujaamades täpselt ühe korra. Näita, et ka ainult Super-Air'ga lennates on võimalik teha selline ringreis, et kõigis lennujaamades maandutakse täpselt üks kord.

Ülesanne 11. Olgu Γ teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoon. Tipust C tõmmatud kõrgus lõikab külge AB punktis D ja ümberringjoont teist korda punktis E, tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AB punktis F ja ümberringjoont teist korda punktis G. Sirge GD lõikab ringjoont Γ teist korda punktis H, sirge HF lõikab ringjoont Γ teist korda punktis I. Tõesta, et $AI = EB$.

Ülesanne 12. Antud on kolmnurk ABC. Külje AB keskpunkt on M ning ABC ümberringjoone kaare BC, mis ei sisalda tippu A, keskpunkt on T. Punkt K kolmnurga ABC sees on selline, et trapets $MATK$ on võrdhaarne, kusjuures $AT \parallel MK$. Tõesta, et $AK = KC$.

Ülesanne 13. Ruudu $ABCD$ ümberringjoone lühemal kaarel AB võetakse punkt P. Olgu $CP \cap BD = R$ ja $DP \cap AC = S$. Tõesta, et kolmnurgad ARB ja DSR on võrdse pindalaga.

Ülesanne 14. Kumeras nelinurgas $ABCD$ diagonaal BD poolitab nurga ABC. Kolmnurga ABC ümberringjoon lõikab külgi AD ja CD vastavalt punktides P ja Q. Punkti D läbiv ja sirgega AC paralleelne sirge lõikab sirgeid BC ja BA vastavalt punktides R ja S. Tõesta, et punktid P, Q, R ja S asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 15. Kumera nelinurga $ABCD$ nurkade A ja C summa on väiksem kui $180°$. Tõesta, et

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD).$$

Ülesanne 16. Kas $712! + 1$ on algarv?

Ülesanne 17. Kas leiduvad paarikaupa erinevad ratsionaalarvud x, y ja z nii, et

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

Ülesanne 18. Olgu p algarv ja olgu n positiivne täisarv. Leia, kui palju on nelikuid (a_1, a_2, a_3, a_4), kus $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ iga $i = 1, 2, 3, 4$ korral, nii et

$$p^n \mid (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1).$$

Ülesanne 19. Olgu m ja n ühistegurita positiivsed täisarvud. Leia $\text{SÜT}(2^m - 2^n, 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$ kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 20. Vaatleme selliste positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et iga $k \geqslant 2$ korral

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

kus 2015^i on suurim arvu 2015 aste, mis jagab arvu $a_k + a_{k-1}$. Tõesta, et kui see jada on perioodiline, siis selle periood jagub arvuga 3.