Ülesanded

10. november 2012, Tartu, Eesti

–Estonian version–

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Tohib kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Arvud 1 kuni 360 jaotatakse üheksaks alamhulgaks, mis koosnevad järjestikustest täisarvudest. Nende alamhulkade arvude summad kirjutatakse 3×3 tabeli lahtritesse. Kas on võimalik, et saadud tabel on maagiline ruut?

Märkus: Maagiliseks ruuduks nimetatakse ruudukujulist arvude tabelit, mille igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil olevate arvude summad on kõik võrdsed.

Ülesanne 2. Olgu a, b, c reaalarvud. Tõesta, et

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \le 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Ülesanne 3. a) Tõesta, et võrrandil

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x, on täpselt üks reaalarvuline lahend igas lõigus, mille otspunktideks on järjestikused positiivsed täisarvud.

b) Tõesta, et sellel võrrandil ei ole positiivseid ratsionaalarvulisi lahendeid.

Ülesanne 4. Tõesta, et leidub lõpmata palju täisarvude paare (a, b), mille korral võrrandi

$$x^{2012} = ax + b$$

lahendite hulgas on kaks erinevat reaalarvu, mille korrutis on 1.

Ülesanne 5. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi reaalarvude x ja y korral rahuldavad võrdust

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy)).$$

Ülesanne 6. Laual on 2012 lampi. Kaks inimest mängivad järgmist mängu. Iga käigu ajal vajutab mängija ühe lambi lülitit, aga ta ei tohi tagasi saada ühtegi juba esinenud seisu. Mängija, kes enam käiku teha ei saa, kaotab. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

Ülesanne 7. 2012×2012 ruudustiku diagonaalil tippudega üleval paremas ja all vasakus nurgas on märgistatud mõned ruudud. Ükski märgistatud ruutudest ei asu nurgas. Ruudustiku ruudud täidetakse täisarvudega järgmiselt. Kõigisse ülemises ja vasakus servas asuvatesse ruutudesse kirjutatakse arv 1. Kõigisse märgistatud ruutudesse kirjutatakse 0. Igasse ülejäänud ruutu kirjutatakse tema ülemises ja vasakus naaberruudus olevate arvude summa. Tõesta, et arv, mis asub alumises paremas nurgas, ei jagu arvuga 2011.

Ülesanne 8. Olgu antud suunatud graaf, mis ei sisalda suunatud tsükleid. Servade arv üheski suunatud ahelas ei ole suurem kui 99. Tõesta, et on võimalik värvida selle graafi kõik servad kahe värviga nii, et servade arv üheski ühevärvilises suunatud ahelas ei ole suurem kui 9.

Ülesanne 9. 5×5 ruudustiku igasse ruutu on kirjutatatud arv 0. Meil on lubatud valida ruudustikust suvaline ruut ja suurendada ühe võrra kõiki arve, mis asuvad selles ruudus ja kõigis ruutudes, mis omavad temaga ühist serva. Kas on võimalik saavutada olukord, kus kõigis ruudustiku ruutudes on samaaegselt arv 2012?

Ülesanded

10. november 2012, Tartu, Eesti

–Estonian version–

Ülesanne 10. Kaks mängijat A ja B mängivad järgmist mängu. Enne mängu algust valib A 1000 mitte tingimata erinevat paaritut algarvu. Seejärel valib B neist pooled ja kirjutab tahvlile. Igal käigul valib mängija positiivse täisarvu n, kustutab tahvlilt suvalised algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ja kirjutab tahvlile arvu $p_1 p_2 \ldots p_n - 2$ kõik algarvulised tegurid (kui mõni algarv esineb arvu $p_1 p_2 \ldots p_n - 2$ tegurduses algarvude korrutiseks mitu korda, siis kirjutatakse see algarv nii mitu korda tahvlile, kui ta esineb). Mängija A alustab. Mängija, kelle käigu järel jääb tahvel tühjaks, kaotab. Tõesta, et ühel mängijatest leidub võitev strateegia, ja leia, kummal.

Märkus: Kuna arvul 1 ei leidu algarvulisi tegureid, on tahvlilt ühe arvu 3 kustutamine lubatud käik.

Ülesanne 11. Kolmnurgas ABC kehtib $\angle A = 60^\circ$. Kolmnurga sees valitakse punkt T nii, et

$$\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ.$$

Olgu M külje BC keskpunkt. Tõesta, et $|TA| + |TB| + |TC| = 2|AM|$.

Ülesanne 12. Olgu $P_0, P_1, \ldots, P_8 = P_0$ järjestikused punktid ringjoonel ja Q selline punkt hulknurga $P_0 P_1 \ldots P_7$ sees, et iga $i = 1, \ldots, 8$ korral $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$. Tõesta, et summa

$$\sum_{i=1}^{8} |P_{i-1} P_i|^2$$

on minimaalne parajasti siis, kui Q on ringjone keskpunkt.

Ülesanne 13. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ja H tema kõrguste lõikepunkt. Kõrgused, mis tõmmatakse tippudest A, B ja C, lõikavad kolmnurga ümberringjoont teist korda vastavalt punktides H_A, H_B and H_C. Tõesta, et $S_{H_A H_B H_C} \leqslant S_{ABC}$.

Ülesanne 14. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC, CA, AB vastavalt punktides D, E, F. Olgu G lõigu DE keskpunkt. Tõesta, et $\angle EFC = \angle GFD$.

Ülesanne 15. Kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt O paikneb nelinurga sees, kuid mitte diagonaalil AC. Nelinurga diagonaalid lõikuvad punktis I. Kolmnurga AOI ümberringjoon lõikab külgi AD ja AB vastavalt punktides P and Q; kolmnurga COI ümberringjoon lõikab külgi CB ja CD vastavalt punktides R and S. Tõesta, et $PQRS$ on rööpkülik.

Ülesanne 16. Olgu n, m ja k positiivsed täisarvud, mille korral $(n-1)n(n+1) = m^k$. Tõesta, et $k = 1$.

Ülesanne 17. Tähistagu $d(n)$ arvu n positiivsete jagajate arvu. Leia kõik kolmikud (n, k, p), kus n ja k on positiivsed täisarvud ja p algarv, mille korral

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Ülesanne 18. Leia kõik täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Ülesanne 19. Näita, et $n^n + (n+1)^{n+1}$ on kordarv lõpmata paljude positiivsete täisarvude n korral.

Ülesanne 20. Leia võrrandi $2x^6 + y^7 = 11$ kõik täisarvulised lahendid.