Baltic Way '11
Greifswald, Germany

Ülesanded –Estonian version–

Ülesanne 1 Reaalarvud $x_1, \ldots, x_{2011}$ rahuldavad tingimusi

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \ldots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

kus $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2011}$ on permutatsioon arvudest $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$. Tõesta, et

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2011}.$$

Ülesanne 2 Olgu $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ selline funktsioon, et kõigi täisarvude x ja y korral kehtib

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Tõesta, et f on tõkestatud, st leidub selline konstant C, et iga täisarvu x korral

$$-C < f(x) < C.$$

Ülesanne 3 Mittenegatiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on selline, et iga $n > 2$ korral on a_{n+1} arvu $a_n^n + a_{n-1}$ viimane number. Kas alati peab paika, et mingi n_0 jaoks on jada $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ perioodiline?

Ülesanne 4 Olgu a, b, c, d sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $a+b+c+d = 4$. Tõesta võrratus

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

Ülesanne 5 Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kõigi reaalarvude x korral. Leia $f(0)$.

Ülesanne 6 Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et selliseid sirgeid, mis läbivad koordinaatide alguspunkti ja veel täpselt ühte niisugust täisarvuliste koordinaatidega punkti (x, y), kus $0 \leqslant x, y \leqslant n$, on vähemalt $\frac{n^2}{4}$.

Ülesanne 7 Olgu T 15-elemendiline hulk $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant a < b \leqslant 6\}$. Olgu S hulga T alamhulk, mis kasutab ära kõik kuus numbrit $1, 2, \ldots, 6$, kuid mille ükski kolm elementi ei kasuta ära kõiki neid kuut numbrit. Leia hulga S suurim võimalik elementide arv.

Ülesanded –Estonian version–

Ülesanne 8 Greifswaldis on kolm kooli A, B ja C, millest igaühes õpib mõni õpilane. Iga kolme sellise õpilase seas, kellest üks õpib koolis A, teine koolis B ja kolmas koolis C, on kaks õpilast, kes on omavahel tuttavad, ja kaks õpilast, kes tuttavad ei ole. Tõesta, et kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest.

- Kooli A mingi õpilane on tuttav kooli B kõigi õpilastega.
- Kooli B mingi õpilane on tuttav kooli C kõigi õpilastega.
- Kooli C mingi õpilane on tuttav kooli A kõigi õpilastega.

Ülesanne 9 Mõõtmetega $m \times n$ ruudustiku värvimist kahe värviga (must ja valge) nimetame *korrektseks*, kui on rahuldatud järgmised tingimused.

- Kõik ruudustiku servades olevad ruudud on värvitud mustaks.
- Neli ruutu, mis moodustavad 2×2 ruudu, ei ole kunagi kõik ühte värvi.
- Neli ruutu, mis moodustavad 2×2 ruudu, ei ole kunagi värvitud nii, et ainult diagonaalselt paiknevad ruudud on ühte värvi.

Milliste mõõtmete $m \times n$ $(m, n \geqslant 3)$ korral leidub korrektne värvimine?

Ülesanne 10 Kaks inimest mängivad järgnevat mängu täisarvudega. Alguses on arvuks 2011^{2011}. Käiakse kordamööda. Igal käigul kas lahutatakse arvust mingi täisarv 1-st 2010-ni või jagatakse arv 2011-ga, vajadusel ümardades tulemuse allapoole lähima täisarvuni. Võidab mängija, kes esimesena muudab arvu mittepositiivseks. Kummal mängijal leidub võitev strateegia?

Ülesanne 11 Olgu AB ja CD ringjoone $\mathcal{C}$ kaks diameetrit. Suvalise punkti P jaoks ringjoonel $\mathcal{C}$ olgu R ja S punkti P projektsioonid vastavalt sirgetele AB and CD. Tõesta, et lõigu RS pikkus ei sõltu punkti P valikust.

Ülesanne 12 Olgu P selline punkt ruudu $ABCD$ sees, et $|PA| : |PB| : |PC|$ suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$. Leia nurk $\angle BPA$.

Ülesanne 13 Olgu E punkt kumera nelinurga $ABCD$ sees. Kolmnurgad $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ ja $\triangle DAI$ konstrueeritakse nelinurgast väljapoole nii, et kehtivad sarnasused $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ja $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Olgu P, Q, R ja S punkti E projektsioonid vastavalt sirgetele AB, BC, CD ja DA. Tõesta, et kui $PQRS$ on kõõlnelinurk, siis

$$|EF| \cdot |CD| = |EG| \cdot |DA| = |EH| \cdot |AB| = |EI| \cdot |BC|\,.$$

Ülesanne 14 Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC, CA, AB vastavalt punktides D, E, F. Olgu G selline punkt siseringjoonel, et FG on diameeter. Sirged EG ja FD lõikuvad punktis H. Tõesta, et $CH \parallel AB$.

Ülesanded –Estonian version–

Ülesanne 15 Olgu $ABCD$ selline kumer nelinurk, et $\angle ADB = \angle BDC$. Eeldame, et punkt E küljel AD rahuldab võrdust
$$|AE| \cdot |ED| + |BE|^2 = |CD| \cdot |AE|.$$
Tõesta, et $\angle EBA = \angle DCB$.

Ülesanne 16 Olgu a suvaline täisarv. Defineerime jada $x_0, x_1, \ldots$ võrdustega $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ja
$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ iga } n > 1 \text{ korral.}$$
Leia suurim täisarv k_a, mille korral leidub selline algarv p, et p^{k_a} jagab arvu $x_{2011} - 1$.

Ülesanne 17 Leia kõik sellised positiivsed täisarvud d, et alati, kui d jagab mingit positiivset täisarvu n, jagab d ka iga täisarvu, mis on saadav arvu n numbrite ümberjärjestamisel.

Ülesanne 18 Leia kõik sellised algarvude paarid (p, q), mille korral arvud $p^2 + q^3$ ja $q^2 + p^3$ on mõlemad täisruudud.

Ülesanne 19 Olgu $p \neq 3$ algarv. Tõesta, et leidub positiivsete täisarvude mittekonstantne aritmeetiline jada $x_1, x_2, \ldots, x_p$, mille kõigi liikmete korrutis on täiskuup.

Ülesanne 20 Ütleme, et täisarv $n \geqslant 1$ on *tasakaalus*, kui tal on paarisarv erinevaid algarvulisi jagajaid. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n, et arvude n, $n + 1$, $n + 2$ ja $n + 3$ hulgas on täpselt kaks tasakaalus arvu.