ESTONIAN

"BALTI TEE" 2010

REYKJAVÍK, 6. NOVEMBER 2010

Aega on $4\frac{1}{2}$ tundi.
Küsimusi saab esitada esimese 30 minuti jooksul.
Ainsad lubatud abivahendid on joonlaud ja sirkel.
Iga ülesanne on väärt 5 punkti.

Ülesanne 1. Leia kõik reaalarvude nelikud (a,b,c,d), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}(b+c+d)^{2010}=3a\\(a+c+d)^{2010}=3b\\(a+b+d)^{2010}=3c\\(a+b+c)^{2010}=3d.\end{cases}$$

Ülesanne 2. Olgu x selline reaalarv, et $0<x<\frac{\pi}{2}$. Tõesta, et

$$\cos^2 x\cot x+\sin^2 x\tan x\geqslant 1.$$

Ülesanne 3. Olgu x_1, x_2, …, x_n $(n\geqslant 2)$ reaalarvud, mis on suuremad kui 1. Eeldame, et $|x_i-x_{i+1}|<1$ iga $i=1,2,\ldots,n-1$ korral. Tõesta, et

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}<2n-1.$$

Ülesanne 4. Leia kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, et

$$(x-2010)P(x+67)=xP(x)$$

iga täisarvu x korral.

Ülesanne 5. Tähistagu $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka. Leia kõik sellised funktsioonid $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, et

$$f(x^2)+f(xy)=f(x)f(y)+yf(x)+xf(x+y)$$

kõigi $x,y\in\mathbb{R}$ korral.

Ülesanne 6. Ruudustik mõõtmetega $n\times n$ on värvitud n värviga nii, et peadiagonaali ruudud (ülemisest vasakpoolsest alumise parempoolseni) on esimest värvi, tema kahe naaberdiagonaali ruudud teist värvi, kahe järgmise diagonaali (üks võetud ülevalt ja teine alt) ruudud kolmandat värvi jne, kuni kaks nurgaruutu (ülemine parempoolne ja alumine vasakpoolne) on n-ndat värvi. Osutub, et on võimalik asetada ruutudele n malevankrit nii, et nad üksteist ei tulista ja ükski kaks vankrit pole sama värvi ruutudel. Tõesta, et $n\equiv 0 \pmod 4$ või $n\equiv 1 \pmod 4$.

Ülesanne 7. Riigi linnadest üks on pealinn. Iga kahe linna A ja B korral leidub otselend linnast A linna B ja sama hinnaga otselend linnast B linna A. On teada, et kõik ringreisid, mille käigus maandutakse igas linnas täpselt ühe korra, on ühesuguse kogumaksumusega. Tõesta, et kõik ringreisid, mis ei läbi pealinna, kuid mille käigus maandutakse igas muus linnas täpselt ühe korra, on samuti ühesuguse kogumaksumusega.

Ülesanne 8. Klubis, millesse kuulub 30 liiget, on algselt igal liikmel kübar. Ühel päeval saadab iga liige oma kübara mõnele teisele liikmele (üks ja sama liige võib saada rohkem kui ühe kübara). Tõesta, et leidub 10 liikmest koosnev rühm, milles ükski liige ei saa kübarat üheltki teiselt liikmelt selles rühmas.

Ülesanne 9. On antud 1000 tikuga tops. Kaks mängijat teevad kordamööda käike. Igal käigul võib võtta topsist 1 kuni 5 tikku ära, aga ülimalt 10 korda kogu mängu jooksul on lubatud võtta ka 6 tikku (näiteks peale 7 erandlikku käiku esimeselt mängijalt ja 3 erandlikku käiku teiselt pole rohkem erandlikke käike lubatud teha). Võidab see, kes võtab viimase tiku. Tee kindlaks, kummal mängijal on võitev strateegia.

Ülesanne 10. Olgu n täisarv, $n \geqslant 3$. Vaatleme kumera n-nurga kõiki jaotusi kolmnurkadeks $n-3$ mittelõikuva diagonaaliga ja nende kolmnurkade selliseid värvimisi mustaks ja valgeks, et ühise küljega kolmnurgad on alati eri värvi. Leia vähim võimalik mustade kolmnurkade arv.

Ülesanne 11. Punkt S on ruudu $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt. Ringjoon k läbib punkte A, C ja ringjoon k' läbib punkte B, D ning need ringjooned lõikuvad kahes erinevas punktis P ja Q. Tõesta, et S asub sirgel PQ.

Ülesanne 12. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk, millel on täpselt üks paar paralleelseid külgi.

a) Näita, et külgede AB, BC, CD, DA pikkused (selles järjekorras) ei moodusta aritmeetilist progressiooni.
b) Näita, et võib juhtuda, et külgede AB, BC, CD, DA pikkused võetuna mingis teises järjekorras moodustavad aritmeetilise progressiooni.

Ülesanne 13. Teravnurkses kolmnurgas ABC on lõik CD kõrgus ning H kõrguste lõikepunkt. Teades, et selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub nurga DHB poolitajat sisaldaval sirgel, leia nurga CAB suuruse kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 14. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk. Olgu D ja E sellised punktid külgedel AC ja BC, et A, B, D ja E asuvad ühel ringjoonel. Kolmnurga CDE ümberringjoon lõikab külge AB kahes punktis X ja Y. Tõesta, et lõigu XY keskpunkt on tipust C küljele AB tõmmatud kõrguse aluspunkt.

Ülesanne 15. Kolmnurga ABC nurgapoolitajal AL valitakse punktid M ja N nii, et $\angle ABM = \angle ACN = 23^\circ$. Kolmnurga sees valitakse selline punkt X, et $|BX| = |CX|$ ja $\angle BXC = 2\angle BML$. Leia nurga MXN suurus.

Ülesanne 16. Positiivse täisarvu k jaoks tähistagu $d(k)$ tema positiivsete jagajate arvu (näiteks $d(12) = 6$) ning $s(k)$ tema numbrite summat (näiteks $s(12) = 3$). Positiivset täisarvu n nimetame *imeliseks*, kui leidub positiivne täisarv k, mille korral $d(k) = s(k) = n$. Leia vähim ühest suurem paaritu imeline arv.

Ülesanne 17. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arvu n^2 kümnendesitus koosneb ainult paaritutest numbritest.

Ülesanne 18. Olgu p algarv. Iga täisarvu k jaoks, kus $1 \leqslant k \leqslant p-1$, tähistagu k^{-1} seda üheselt määratud täisarvu, mille korral $1 \leqslant k^{-1} \leqslant p-1$ ja $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Tõesta, et arvude

$$1^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1}+2^{-1}+\ldots+(p-1)^{-1}$$

(liitmine toimub mooduli p järgi) seas leidub ülimalt $(p+1)/2$ erinevat.

Ülesanne 19. Leia kõik positiivsed täisarvud k, mille jaoks leiduvad paarikaupa erinevad algarvud $p_1, p_2, \ldots, p_k$, nii et

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_k^2 = 2010.$$

Ülesanne 20. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille jaoks leidub positiivsete täisarvude hulga $\mathbb{N}$ selline lõpmatu alamhulk A, et mistahes paarikaupa erinevate arvude $a_1, \ldots, a_n \in A$ korral on arvud $a_1 + \ldots + a_n$ ja $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ ühistegurita.