Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2009”

Trondheimis, 7. novembril 2009

1. Polünoomi $p(x)$ aste on $n \geqslant 2$ ning tal on kordsusi arvestades täpselt n reaalarvulist juurt. Tema pealiikme kordaja on 1, ükski tema juur ei ületa arvu 1 ja $p(2) = 3^n$. Leia $p(1)$ kõik võimalikud väärtused.

2. Mittenegatiivsed täisarvud $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ rahuldavad võrratust

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leqslant 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$

   Tõesta, et $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leqslant 9900$.

3. On antud positiivne täisarv n. Näita, et saab valida kordajad $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ nii, et

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leqslant 4.$$

4. Leia kõik sellised täisarvud $n > 1$, et võrratus

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

   kehtib mistahes reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korral.

5. Olgu $f_0 = f_1 = 1$ ja $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geqslant 0)$. Leia võrrandi

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}$$

   kõik reaalarvulised lahendid.

6. Olgu a ja b sellised täisarvud, et võrrandil $x^3 - ax^2 - b = 0$ on kolm täisarvulist juurt. Tõesta, et leiduvad täisarvud d ja k nii, et $b = dk^2$ ning arv a jagub arvuga d.

7. Algarv p ja täisarvud a, b, c rahuldavad tingimusi

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

   Tõesta, et $p \mid a, b, c$.

8. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral saab arvud

$$n, n + 1, n + 2, \ldots, n + 8$$

   jaotada kaheks rühmaks nii, et kumbagi rühma kuuluvate arvude korrutised oleksid võrdsed.

9. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral $2^{n+1} - n^2$ on algarv.

10. Tähistame $d(k)$ abil täisarvu k positiivsete jagajate arvu. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve M, mis ei esitu kujul

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2,$$

   kus n on positiivne täisarv.

11. Kolmnurga ABC külje AC keskpunkt on M. Punkt K asub kiirel BA, kusjuures punkt A asub punktide B ja K vahel. Sirge KM ja külg BC lõikuvad punktis L. Punkt P asub lõigul BM, kusjuures PM on nurga LPK poolitaja. Sirge ℓ läbib punkti A ning on paralleelne lõiguga BM. Tõesta, et punkti M projektsioon sirgele ℓ asub sirgel PK.

12. Nelinurgas $ABCD$ on $AB \| CD$ ja $|AB| = 2|CD|$. Sirge ℓ on risti küljega CD ning läbib punkti C. Ringjoon keskpunktiga D ja raadiusega $|DA|$ lõikab sirget ℓ punktides P ja Q. Tõesta, et $AP \perp BQ$.

13. Kolmnurga ABC kõrgused AD, BE, CF lõikuvad punktis H. Kolmnurkade EHF, FHD, DHE siseringjoonte keskpunktid on vastavalt I_1, I_2, I_3. Tõesta, et sirged AI_1, BI_2, CI_3 lõikuvad ühes punktis.

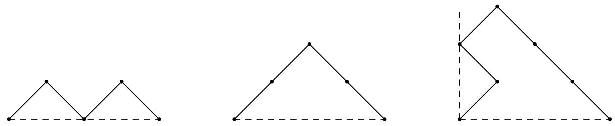
14. Milliste $n \geq 2$ korral leidub n paarikaupa mittesarnast kolmnurka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nii, et mistahes neist võib tükeldada n paarikaupa mittesarnaseks kolmnurgaks, millest igaüks on sarnane ühega kolmnurkadest $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

15. Ühikruut on jagatud m nelinurgaks $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Olgu S_i nelinurga Q_i külgede ruutude summa ($i = 1, 2, \ldots, m$). Tõesta, et

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m \geqslant 4.$$

16. Nimetame *trønd-n-konnaks* teekonda, mis algab puntkis $(0,0)$, lõpeb punktis $(2n,0)$, ei lõika iseennast, ei välju koordinaattasandi esimesest veerandist, ning mille iga samm on üks vektoritest $(1,1)$, $(1,-1)$ ja $(-1,1)$. (Joonisel on kujutatud kõikvõimalikud trønd-2-konnad).

Leia trønd-n-kondade arv.



17. Leia suurim täisarv n, mille korral leidub n erinevat täisarvu, millest ükski ei jagu arvuga 7, 11 ega 13, kuid mistahes kahe arvu summa jagub vähemalt ühega arvudest 7, 11 ja 13.

18. Olgu $n > 2$ täisarv, linnade arv riigis. Iga kahe linna vahel on maantee, millele on omistatud täisarv hulgast $\{1, 2, \ldots, m\}$ (eri maanteedele võib omistada sama arvu). Linna *prioriteediks* nimetatakse temast väljuvatele maanteedele omistatud arvude summat. Leia vähim m, mille korral on võimalik, et kõigil linnadel on erinev prioriteet.

19. Peol on kaheksa inimest. Mistahes kaks neist kas tunnevad teineteist või ei tunne. Igal inimesel on täpselt kolm tuttavat. Kas järgmised kaks tingimust saavad olla samaaegselt täidetud:

- mistahes kolme inimese seas leidub kaks, kes teineteist ei tunne;
- mistahes nelja inimese seas leidub kaks, kes teineteist tunnevad?

20. Ühes Läänemeremaa linnas on 16 haiglat. Igal ööl on täpselt neli haiglat valves. Kas leidub selline graafik, et 20 öö järel on iga hailgate paar olnud koos valves täpselt ühel ööl?