Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2008”

Gdanskis, 8. novembril 2008

1. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid $p(x)$, mille korral

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$$

ja

$$p(0) = 0.$$

2. Tõesta, et kui reaalarvud a, b ja c rahuldavad tingimust $a^2+b^2+c^2=3$, siis

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Millal kehtib võrdus?

3. Kas leidub selline nurk $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, et $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ mingis järjekorras võetuna on aritmeetilise jada järjestikused liikmed?

4. Polünoomi P kordajad on täisarvud ning viie erineva täisarvu x korral $P(x)=5$. Tõesta, et ei leidu sellist täisarvu x, et $-6 \leqslant P(x) \leqslant 4$ või $6 \leqslant P(x) \leqslant 16$.

5. Romeol ja Julial on kummalgi korrapärane tetraeeder, mille igasse tippu on kirjutatud üks positiivne reaalarv. Nad seavad oma tetraeedri igale servale vastavusse tema kahte otspunkti kirjutatud arvude korrutise. Siis nad kirjutavad oma tetraeedri igale tahule tema kolmele servale vastavusse seatud arvude summa. Romeo tetraeedri tahkudele kirjutatud neli arvu osutuvad võrdseteks Julia tetraeedri tahkudele kirjutatud nelja arvuga. Kas sellest järeldub, et Romeo tetraeedri tippudesse kirjutatud neli arvu on võrdsed Julia tetraeedri tippudesse kirjutatud nelja arvuga?

6. Leia kõik sellised lõplikud vähemalt kahe elemendiga positiivsete täisarvude hulgad, et mistahes kahe arvu a, b $(a>b)$ korral sellest hulgast kuulub arv $\frac{b^2}{a-b}$ samuti sellesse hulka.

7. Kui palju on positiivsete täisarvude paare (m,n), mille korral $m<n$ ja mis rahuldavad võrrandit

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\ ?$$

8. Vaatleme niisugust positiivsete täisarvude hulka A, et A vähim element on 1001 ja A kõigi elementide korrutis on täisruut. Milline on A suurima elemendi vähim võimalik väärtus?

9. Rahuldagu positiivsed täisarvud a ja b võrrandit

$$a^b - b^a = 1008.$$

Tõesta, et a ja b on kongruentsed mooduli 1008 järgi.

10. Positiivse täisarvu n jaoks tähistagu $S(n)$ tema numbrite summat. Leia avaldise $\frac{S(n)}{S(16n)}$ suurim võimalik väärtus.

11. Vaatleme hulga $\{1, 2, \ldots, 169\}$ alamhulka A, mis koosneb 84 elemendist, millest ühegi kahe elemendi summa ei ole 169. Tõesta, et hulgas A leidub täisruut.

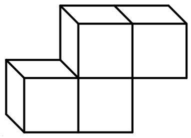
12. Kooli $3n$ õpilasega klassis teeb iga kaks õpilast ühe ühise kingituse täpselt ühele ülejäänud õpilastest. Tõesta, et iga paaritu n korral on võimalik olukord, kus klassi iga kolme õpilase A, B ja C korral kui A ja B teevad kingituse C-le, siis A ja C teevad kingituse B-le.

13. Läheneva rahvusvahelise matemaatikavõistluse jaoks paluti osalevatel maadel valida kombinatoorikaülesandeid etteantud üheksa seast. Et teadagi, kui raske on tavaliselt kokkuleppele jõuda, polnud üllatav, et juhtus järgmine:

- iga maa hääletas täpselt kolme ülesande poolt;
- iga kaks maad hääletasid erinevate ülesannete hulkade poolt;
- iga kolme maa korral leidus ülesanne, mille poolt ükski neist ei hääletanud.

Leia osalevate maade suurim võimalik arv.

14. Kas järgmise kujuga 4 ühikkuubist koosnevatest plokkidest on võimalik kokku panna $4 \times 4 \times 4$ kuup?



15. Ruudustikule mõõtmetega $n \times n$ paigutatakse mõned 1×2 doominokivid, millest igaüks katab kaks naaberruutu ja ükski kaks ei puutu kokku (isegi mitte nurkapidi). Teades, et doominokividega kaetud ala kogupindala on 2008, leia vähim võimalik n väärtus.

16. Olgu $ABCD$ rööpkülik. Ringjoon diameetriga AC lõikab sirget BD punktides P ja Q. Punkti C läbiv sirgega AC ristuv sirge lõikab sirget AB ja AD vastavalt punktides X ja Y. Tõesta, et punktid P, Q, X ja Y asuvad ühel ringjoonel.

17. Olgu a, b, c ja d etteantud ringjoonel paiknevate tippudega nelinurga külgede pikkused. Tõesta, et korrutis $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ saavutab maksimumi siis, kui nelinurk on ruut.

18. Olgu AB ringjoone S diameeter ja L puutuja punktis A. Olgu c fikseeritud positiivne reaalarv. Vaatleme kõiki sirge L punktide X ja Y paare, mis asuvad punktist A erineval pool ja rahuldavad tingimust $|AX| \cdot |AY| = c$. Sirged BX ja BY lõikavad ringjoont S vastavalt punktides P ja Q. Tõesta, et leidub punkt, mida läbivad kõik sirged PQ.

19. Ringjoonele diameetriga 1 on tõmmatud mõned kõõlud. Nende pikkuste summa on suurem kui 19. Tõesta, et leidub diameeter, mis lõikab vähemalt 7 kõõlu.

20. Olgu M ja N kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunktid vastavalt külgedega BC ja AB. Teades, et

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA},$$

tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.