Matemaatikaolümpiaad “Balti tee 2006”

Turus, 3. novembril 2006

1. Reaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kohta on teada, et iga $n = 2, 3, 4, \ldots$ korral $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$. Leia selle jada järjestikuste positiivste elementide suurim võimalik arv.

2. Reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_{59}$ lõigult $[-2, 17]$ rahuldavad tingimust $a_1 + a_2 + \ldots + a_{59} = 0$. Tõesta, et

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{59}^2 \leqslant 2006.$$

3. Tõesta, et iga reaalarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$ jaoks leiduvad positiivne täisarv m ja reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_m(x)$, nii et

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Olgu a, b, c, d, e, f mittenegatiivsed reaalarvud, mis rahuldavad tingimust

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Leia avaldise

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

suurim võimalik väärtus ning kõik arvukuuikud (a, b, c, d, e, f), mille korral see suurim väärtus saavutatakse.

5. Üks ajuti ebausaldusväärne professor pühendas oma viimase raamatu teatavale binaarsele tehtele $*$. Selle tehte rakendamine suvalisele kahele täisarvule annab tulemuseks täisarvu. On teada, et see tehe rahuldab järgmist kaht aksioomi:

a) iga $x, y \in \mathbb{Z}$ korral $x * (x * y) = y$;

b) iga $x, y \in \mathbb{Z}$ korral $(x * y) * y = x$.

Professor väidab oma raamatus, et

1. tehe $*$ on kommutatiivne, st $x * y = y * x$ iga $x, y \in \mathbb{Z}$ korral;
2. tehe $*$ on assotsiatiivne, st $(x * y) * z = x * (y * z)$ iga $x, y, z \in \mathbb{Z}$ korral.

Millised neist väidetest järelduvad ülaltoodud aksioomidest?

6. Leia järgmisi tingimusi rahuldava positiivsete täisarvude hulga suurim võimalik elementide arv.

1. Kõik täisarvud selles hulgas koosnevad hulga $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ numbritest.
2. Ükski number ei esine samas arvus korduvalt.
3. Iga arvu numbrid on kasvavas järjestuses.
4. Igal kahel arvul on vähemalt üks ühine number (võib olla erinevas positsioonis).
5. Ükski number ei esine kõigis arvudes.

7. Fotograaf tegi mõned pildid peol, millest võttis osa 10 inimest. Iga inimeste paar 45 võimalikust esineb koos täpselt ühel fotol, kusjuures igal fotol on kas 2 või 3 inimest. Leia vähim võimalik tehtud fotode arv.

8. Juhataja avastas, et tema osakonnas on siginenud 6 vandenõu, millest igaühesse on segatud täpselt 3 töötajat. Tõesta, et juhataja saab jaotada osakonna töötajad kahte laborisse nii, et ükski vandenõulaste rühm pole tervikuna samas laboris.

9. Korrapärase viisnurga igasse tippu kirjutatakse mingi reaalarv. On lubatud sooritada järgmist operatsiooni: valime viisnurga kaks naabertippu ja asendame kummassegi tippu kirjutatud arvu nende arvude aritmeetilise keskmisega. Kas alati, kui alguses tippudesse kirjutatud viie arvu summa võrdub nulliga, on võimalik saavutada olukord, kus 0 on kirjutatud igasse tippu?

10. 30×30 tabelisse on kirjutatud 162 plussi ja 144 miinust nii, et igas reas ja igas veerus on ülimalt 17 märki. (Ükski lahter ei sisalda üle ühe märgi.) Iga plussi kohta leitakse miinuste arv tema reas, iga miinuse kohta leitakse plusside arv tema veerus. Leia kõigi saadud arvude suurim võimalik summa.

11. Kolmnurga kõrgused on pikkustega 12, 15 ja 20. Leia selle kolmnurga pindala.

12. Kolmnurgas ABC olgu B_1 ja C_1 vastavalt külgede AB ja AC keskpunktid. Olgu P kolmnurkade ABC_1 ja AB_1C ümberringjoonte A-st erinev lõikepunkt. Olgu P_1 sirge AP ja kolmnurga AB_1C_1 ümberringjoone A-st erinev lõikepunkt. Tõesta, et $2|AP| = 3|AP_1|$.

13. Kolmnurga ABC külgedel AB ja AC võetakse vastavalt punktid D ja E. Sirged BE ja CD lõikuvad punktis F. Tõesta, et kui

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA| + |CE| \cdot |CA|,$$

siis punktid A, D, F, E asuvad ühel ringjoonel.

14. Sfäärpinnal märgitakse 2006 punkti. Tõesta, et selle pinna saab lõigata 2006 võrdseks tükiks nii, et iga tüki sisepiirkonnas on täpselt üks märgitud punkt.

15. Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Punkti M läbiv sirge t lõikab kolmnurga ABC ümberingjoont punktides X ja Y, kusjuures A ja C asuvad samal pool sirget t. Tõesta, et $|BX| \cdot |BY| = |AX| \cdot |AY| + |CX| \cdot |CY|$.

16. Kas leidub 4 erinevat positiivset täisarvu, millest mistahes kahe korrutise ja arvu 2006 summa on täisruut?

17. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $3^n + 1$ jagub arvuga n^2.

18. Iga positiivse täisarvu n korral tähistagu a_n arvu $n^{(n^n)}$ viimast numbrit. Tõesta, et jada (a_n) on perioodiline ja leia tema lühima perioodi pikkus.

19. Kas leidub selline positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et iga positiivse täisarvu n korral jagub jada mistahes n järjestikuse elemendi summa arvuga n^2?

20. On antud 12-kohaline 37-ga jaguv arv, mis võib sisaldada ainult numbreid 1, 5, 9. Tõesta, et selle arvu numbrite summa ei ole 76.